Om symbolregnende lommeregnere i den videregående skole

Per G. Østerlie

Adolf Øiens skole

1999

Innledning

Lommeregneren er i stadig utvikling. I flere år har symbolregnende modeller vært på markedet, men de har vært både store og dyre. I den videregående skolen har ikke disse vært tillatt brukt. Spørsmålet om det bør endres på dette er aktualisert med nye og langt billigere modeller. De siste månedene har mine elever og jeg hatt gleden av å få prøve en ny modell lommeregner fra Texas Instrument (TI89). I denne artikkelen følger noen erfaringer vi har gjort oss, og en oppsummering av erfaringer fra andre. Jeg vil også komme inn på bidrag fra forskning fra undervisning med støtte i ny teknologi.

Bakgrunn for forsøket

Forsøket med bruk av symbolregnende lommeregnere ble startet av Eksamenssekretariatet høsten 1998 som et ledd i et større forsøk hvor en ønsket utprøving av IT til eksamen fagene engelsk, samfunnskunnskap og elektrofag. I matematikk ble fagene 2MX og 2MY plukket ut. Alle landets videregående skoler ble invitert til å delta, og fem skoler ble valgt ut som forsøksskoler i matematikk. De fem skolene er Adolf Øiens skole, Hellerud vgs., Sandnes vgs., Strand vgs. og Ulstein vgs.

Ved to av skolene, Sandnes vgs. og Strand vgs., har TI92 vært i bruk i fagene 2MX og 3MX de siste to årene.

Vi fikk låne klassesett med en helt ny modell symbolregnende lommeregner fra Texas Instrument, TI89. Så fersk var denne modellen at den ikke kom til oss, og butikkene, før 15. oktober.

TI89 er på størrelse med tidligere modeller som TI81, 82 og 83, men «innholdet» er langt mer avansert. Et fortrinn er at «innmaten» på over 500kB enkelt kan skiftes i og med at Flash-teknologien er tatt i bruk. I praksis betyr det at en ny kalkulator kan lastes ned fra Internett, en fordel både økonomisk og miljømessig.

Fra Eksamenssekretariatets side har formålet med dette forsøket vært å skaffe erfaringer med bruk av de nye teknologiske hjelpemidlene både i opplæringa og til eksamen: «Hensikten med forsøket er å få utforsket de nye muligheter og få dokumentert erfaring med symbolregnende lommeregnere i matematikkopplæringen. Hvordan kan dette hjelpemidlet bidra til å øke det faglige utbyttet av opplæring i realfag uten samtidig å forringe den tradisjonelle, faglige kvalitet. Hvilke regler bør gjelde for bruk av lommeregnere i framtiden?»

Forsøksgruppa ble satt sammen av de fem forsøksskolene samt to representanter fra Universitetet i Oslo og en representant fra SUE. Sammen skulle vi prøve ut lommeregnerne og finne fram til en mulig eksamensform.

Hva er TI89 i stand til?

Siden 1994 har elevene i den videregående skolen brukt grafisk lommeregner med mulighet til å tegne grafer og utføre numeriske beregninger. De symbolregnende kalkulatorene, som nå begynner å komme i salg, er i tillegg i stand til å utføre eksakte beregninger og rein symbolmanipulasjon slik vi kjenner det fra program laget for større datamaskiner. En fellesbetegnelse for slike program som Derive, Mathematica og Maple er CAS, Computer Algebra Systems (for en historisk oversikt se Hillel 1993). Et CAS kjennetegnes ved funksjonaliteter som:

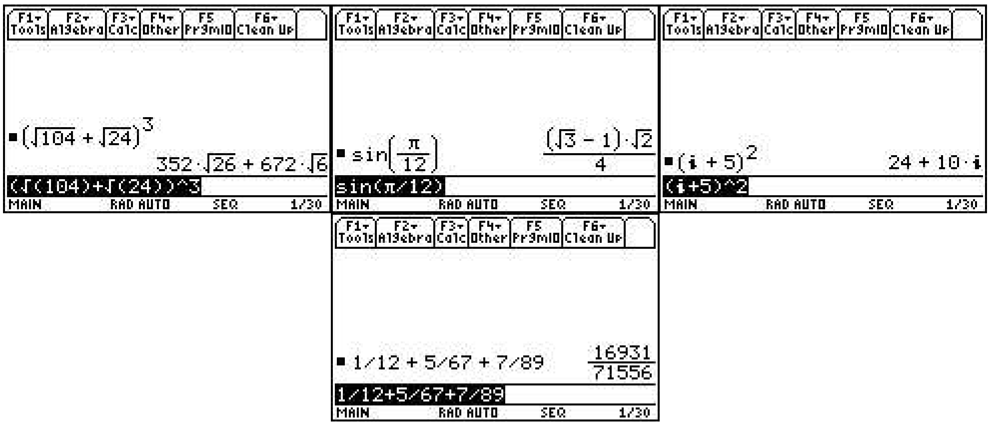
- Eksakt rasjonal, reell og kompleks aritmetikk
- Muligheter for graftegning i både 2D og 3D
- Numeriske løsningsmuligheter
- Symbolsk algebra for manipulasjon og løsning av algebraiske uttrykk

Med en tilpasset versjon av Derive innebygd tilfredsstiller TI89 alle krav til å bli kalt et ekte CAS.

La oss se på noen eksempler som viser en del av denne funksjonaliteten.

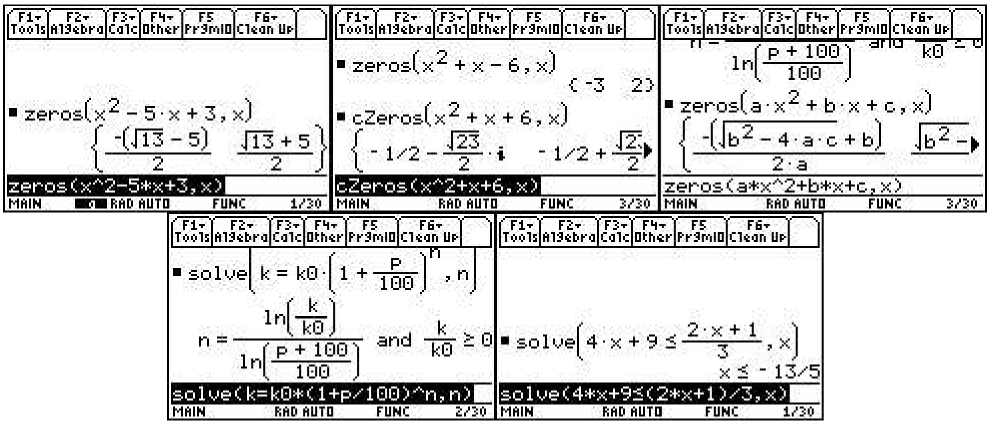
Eksakt rasjonal, reell og kompleks aritmetikk

Det som skiller de grafiske fra de symbolregnende lommeregnerne er den eksakte aritmetikken. Lommeregnere som TI89, regner med eksakte verdier hvor sluttresultatet alltid forkortes.

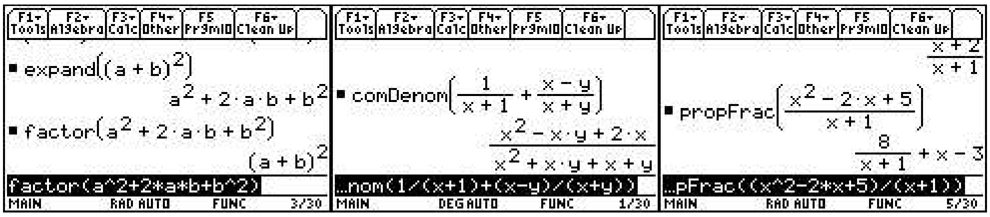


Symbolsk algebra for manipulasjon og løsning av algebraiske uttrykk

Figuren under viser eksempler på hvordan likninger kan løses. Kalkulatoren gir svarene eksakt og kan finne imaginære løsninger. Å løse bokstavuttrykk med hensyn på en variabel er heller ikke noe problem.

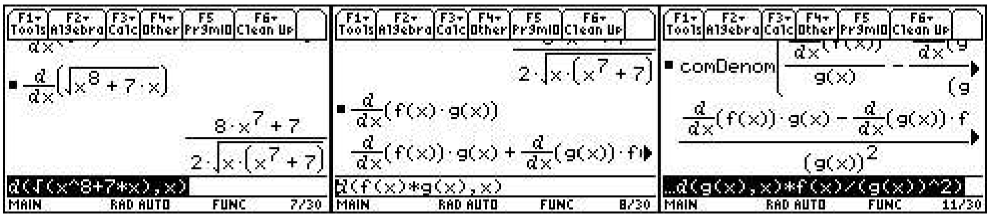


Utvidelse og faktorisering av uttrykk går også greit. TI89 har også kommandoen propFrac som gir delbrøksoppspalting.

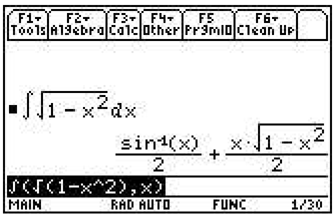


Lignende rutiner fins også for trigonometriske funksjoner

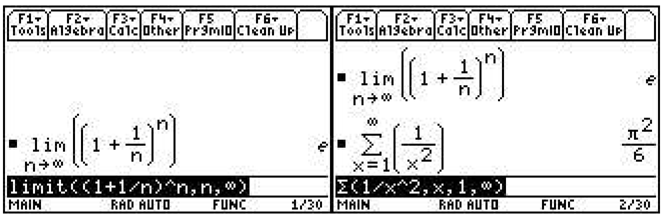
Derivasjon utføres også eksakt.



Integrasjon…



Og grenseverdier og summer…



En symbolbehandlende lommeregner som TI89 kan utføre alle (?) de teknikkene elevene i dag må utføre for hand både raskere og sikrere.

Hvordan kan teknologien utnyttes i matematikkundervisninga?

Skal de symbolregnende lommeregnerne inn i skolen må vi ha et svar på hvorfor. Svaret kan være at det er viktig for elevene å lære å bruke ny teknologi som er aktuell for en seinere arbeidssituasjon. Et slikt argument mener jeg er lite vektig for matematikkursene på allmennfaglig studieretning i den videregående skolen. Grunnen må være at lommeregneren kan være et verktøy til å bedre læringsprosessen eller sparer elevene for unødige utregninger, som igjen frigjør en etterlengtet tid til mer eksperimentering.

At elevene kjøper en avansert lommeregner gir naturligvis ingen garanti for at læringsprosessen bedres. Skal det skje, må lommeregneren inngå på en fornuftig måte i det komplekse samspillet som leder til matematikkunnskap. Utgangspunktet må vi da ta i pedagogikken og ikke i teknikken. Altfor ofte ser en undervisningsopplegg hvor målet synes å være å vise de mest oppfinnsomme anvendelser av ny teknologi. Det er ei felle en lett faller i, men en må alltid prøve å ha disse spørsmålene i bakhodet: Hva er læringsmålene for elevene? Hva ønsker jeg skal skje? Hvordan kan jeg legge til rette for at dette oppnås?

Læreren må ta utgangspunkt i pedagogisk teori eller praksis for å finne et opplegg han mener kan lede til det resultat som ønskes. Et entydig svar finner en neppe. Konstruktivismen, det at alle individer er aktive i konstruksjon av egen kunnskap basert på egne sanseinntrykk og egen kognitiv virksomhet, ser ut til å være et utgangspunkt for de ledende teorier. I følge et slikt syn må elevene utsettes for erfaringer som fører til kognitive handlinger hvor resultatet er konstruksjon av kunnskap. Her kan et CAS inngå i de erfaringene. Siden konstruksjonen av kunnskap er individuell, er løsningen nødvendigvis ikke den samme for alle elever. Bruk av teknologi gjør at vi kan utsette elevene for flere erfaringer hvor håpet er at de individuelle behov kan dekkes.

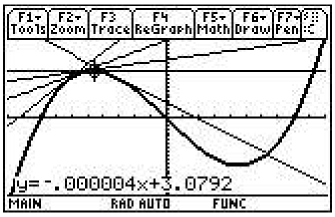
La oss se på et eksempel som etter egen erfaring har fungert godt.

Et eksempel: Den deriverte.

Introduksjonen av den deriverte har vi slitt med i den videregående skole. Tradisjonelt er dette begrepet innført ved definisjon. Så har elevene fått i oppgave å gjennomføre utregninger og latt "Δx gå mot null". Etter det er regler innført noe som har resultert i slike svar på hva den deriverte er: Det var noe med å flytte ned tallet over x og trekke fra en på det som sto der fra før også var det noe med delta x.

Funksjonsbegrepet har vært dårlig utviklet og den deriverte som en funksjon har ikke vært til stede hos flertallet av elevene etter denne første introduksjonen av den deriverte. Skylda må vel vi, matematikklærerne, ta og jeg skal være den første til å innrømme didaktiske svakheter ved egen undervisning. Grenseverdibegrepet er svært vanskelig og ikke den rette introduksjonen. Det viser både egen erfaring og andres (Tall 1985; Cornu 1991; Rothery 1995). Allikevel er det fortsatt slik den deriverte introduseres i de lærebøkene som er i bruk i den videregående skolen.

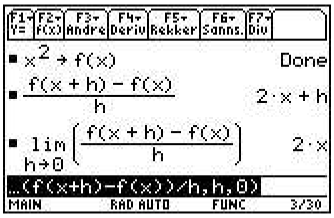
Med ny teknologi kan vi gjennomføre opplæringa i derivasjon på en annen måte. Ved å ta utgangspunkt i spørsmålet om hva en tangent kan fortelle oss om funksjonens egenskaper, kommer de aller fleste elever fram til at stigningstallet til tangenten kan fortelle oss når funksjonen er stigende eller avtagende og at stigningstallet må være null der vi finner topp- og bunnpunkt.

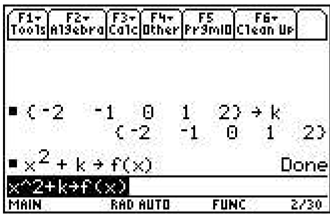


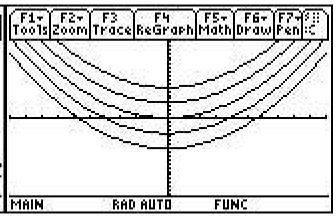
Ved å zoome inn på grafen kan elevene sjøl se lokal linearisasjon og forstå at stigningstallet til tangenten og funksjonens momentane vekst er det samme. Etter å ha satt navnet den deriverte på funksjonen som viser alle disse stigningstallene kan en så gå over på litt eksperimentering. Med en nyere lommeregner er det ikke vanskelig å få tegnet opp grafen til den deriverte for så å prøve å finne hva den kan si oss om egenskapene til den opprinnelige funksjonen. Lommeregneren åpner opp for elevenes egen eksperimentering og manipulering. Er det noen sammenhenger? Tegn opp en derivert av en funksjon og la sidemannen tippe hvilken funksjon den er den deriverte til, eller omtrent, hvordan funksjonen må se ut. Svaret kan vises med en gang.

Har så dette noe for seg eller er det bare en morsom lek ? Min erfaring er at elevene får en mye bedre forståelse av den deriverte enn hva tilfellet er med den tradisjonelle metoden. Denne oppfatningen mener jeg også å kunne forklare. For det første slipper de å stri med grenseverdidefinisjonen i første omgang. Elevene faller ikke av i starten og kan konsentrere seg om hva den deriverte kan si oss om monotoniegenskaper til funksjonen. For det andre bygger dette på prinsipper fra pedagogikken som vi vet fungerer: egen eksperimentering, mange eksempler, flere representasjoner av samme begrep, diskusjoner med medelever og refleksjon over det de holder på med. Støtte i forskning kan en også finne hos Lehtinen og Repo (1996) og Tall (1985)

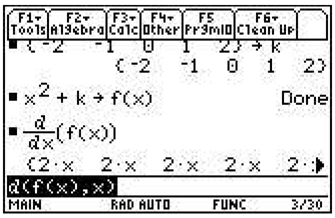
Til slutt kan en gå løs på definisjonen av den deriverte. Med den symbolregnende kalkulatoren kan vi også eksperimentere med den:



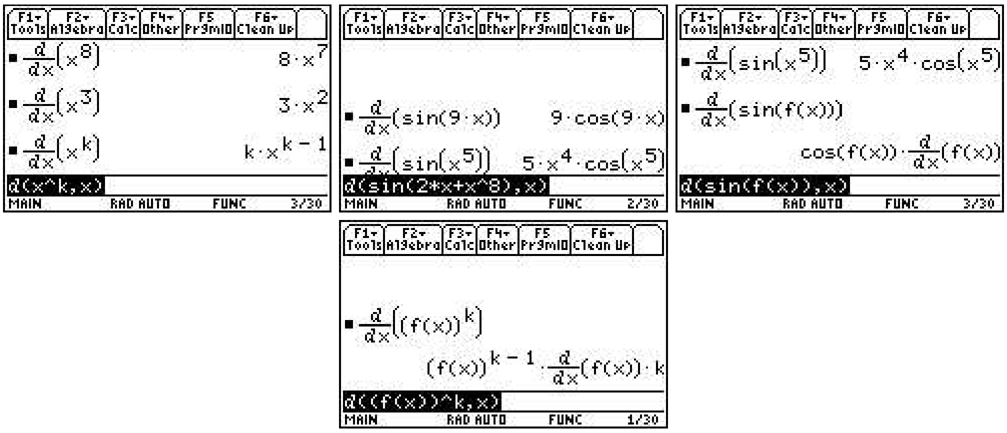




Videre eksperimentering kan være å tegne grafer av en funksjon med forskjellige konstantledd for å observere at alle har lik form. Hva kan en da slutte om den deriverte? Med TI89 kan en finne alle deriverte med et tastetrykk og se at det er samme uttrykk:



Når en seinere skal se på regneregler for den deriverte, som kjerneregelen eller regelen for derivasjon av potenser, kan elevene sjøl «oppdage» eller eksperimentere seg fram til disse. Min erfaring er at det gir et ønske om å få se et bevis.



Nye(?) prinsipper for undervisning med CAS

Norcliff 1996:

> *The fact is that computer algebra packages no more enable one to do mathematics or become a mathematician than a word processor enables one to become a writer*

En tekstbehandler gjør ikke en forfatter, men matematikkfaget favner også regneferdighet, som i denne analogien er skjønnskrift. En viss slik ferdighet er det nødvendig at elevene har. Et problem jeg opplever som lærer er elevenes manglende ferdigheter i algebra. Heldigvis kan ikke kalkulatoren gis skylda for dette siden det gjelder elever i første klasse AF, men dette er et problem. Forståelsen av bevis og utledninger lider sterkt under dette. Inngår, for eksempel, en kvadratsetning, stopper det ofte opp. Slike basiskunnskaper må vi sørge for at elevene har i framtida, sjøl om de kan benytte en symbolregnende kalkulator. Med dette som mål har det kommet fram noen didaktiske betraktninger. Til nå er det ikke så mange som har kommet med slike, men jeg vil presentere de jeg har funnet.

Et prinsipp for undervisningen med CAS, «The White Box/Black Box principle», er lansert av Buchberger (1990) (se også Heugl m. fl. 1997) for å bidra til en løsning på striden mellom de to ytterpunktene i debatten om bruk av et CAS. Buchbergers kompromissforslag ligger mellom de som ser teknologien som roten til alt ondt og de som er av den oppfatning at alle manuelle algoritmer hører fortida til. Han mener at det ikke kan gis et entydig svar. Svaret vil avhenge av om den eksisterende kunnskapen elevene har om emnet. Først når eleven er i besittelse av grunnleggende kunnskap om algoritmene kan en ta i bruk CAS som en «black-box» for å utføre mer komplekse og tidkrevende utregninger.

Buchberger opererer med to begrep: «White Box phase» og «Black Box phase».

I «White Box phase» konstruerer elevene matematiske begrep, algoritmer eller matematisk teori. De nødvendige ferdighetene i regning utvikles uten bruk av CAS. Tidligere emner som inngår i denne fasen anvendes som svarte bokser.

«Black Box phase» er fasen hvor elevene benytter de teknikkene som «svarte bokser» og anvender kunnskapene ved problemløsing.

Satt sammen som «The White Box/Black Box principle» har vi et undervisningsprinsipp hvor emnene introduseres som hvite bokser på tradisjonell måte, og anvendelsene skjer ved bruk av CAS. Et eksempel, hentet fra Heugl m. fl. (1997), og utført av mange matematikklærere, er å studere løsning av lineære likningssett ved innsettingsmetoden og Gauss' algoritme i en «White Box phase». Utregnigene skjer i denne fasen for hand. Etter at elevene behersker denne teknikken går en over i en «Black Box phase» hvor større likningssystem løses, og elevene gis problem hvor CAS er tillatt hjelpemiddel.

En kan også tenke seg dette gjort den andre veien som et «The Black Box/White Box principle» (Heugl m. fl. 1997) hvor «Black Box phase» er fase med eksperimentering hvor målet er å oppdage algoritmer inntil de kan anvendes som en hvit boks. Slik er det mulig for elevene å finne en algoritme for derivasjon av polynomfunksjoner som de seinere ta i bruk uten kalkulator. Denne undervisningsmetoden er vi vant til å kalle induktiv undervisning. Det er åpenbart at en slik innfallsvinkel er mye lettere i en situasjon hvor elevene kan dra nytte av et CAS.

Læreprosessen ved bruk av et CAS blir da delt i tre faser (etter Heugl 1997, 1998 og gode kommentarer fra Harald Solbakken, Sandnes vgs.)

1. **Den eksperimentelle fase** («Heuristic phase»)
   I denne fasen prøver eleven å lage hypoteser, eksperimentere, tenke løsningsstrategier og utvikle elementær forståelse av sammenhenger. En appell til intuisjonen. Det skulle vel ikke være slik at? (jf. Polya: What if?)
2. **Bevisfasen** («The Exact phase»)
   Sammenhenger fra forrige fase gis en teoretisk begrunnelse. Teorier bevises, begrep klargjøres. Lommeregneren benyttes bare for de uvesentlige kalkulasjonsoppgaver for ikke å distrahere elevene fra hovedaktiviteten.
3. **Anvendelsesfasen** («The Applying phase»)
   Elevene settes til problemløsing hvor de algoritmene, begrepene og sammenhengene fra tidligere faser er elementer

Ved å følge disse fasene unngår en at elevene bare blir «tastetrykkere» uten inngående matematisk kunnskap.

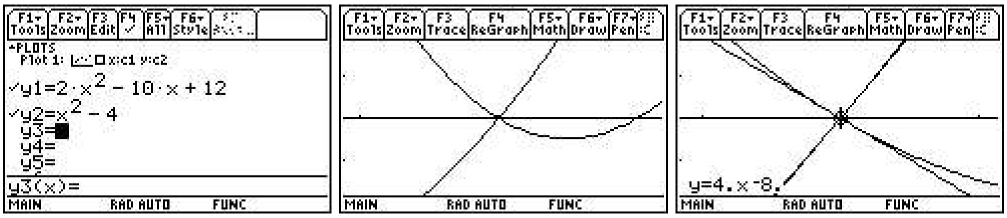
Med «The Module Principle», presentert av Heugl (1997, 1998), får programmeringen sin renessanse i matematikken. Vi finner kraftige programmeringsspråk innebygd i lommeregnerne. Dette kan utnyttes ved at elevene, eller læreren, lager moduler som kan utnyttes både som et didaktisk verktøy og ved problemløsing. Etter tidligere erfaring med programmeringskurs er dette noe jeg har tro på. Ved å måtte lage, eller studere, et program som kan utføre en matematisk algoritme er det god grunn til å tro at dette kan hjelpe til med en bedre forståelse. Fra tidligere forskning kan en finne positive resultater ved elevers konstruksjon av funksjonsbegrepet etter bruk av et tilpasset programmeringsspråk, ISETL. Sjøl om dette språket er utviklet med dette for øyet, kan mye overføres også til andre språk (se Dubinsky og Tall 1991; Dubinsky og Harel 1993). Hvorvidt dette gjelder de svakeste elevene er jeg mer usikker på. Det kan bli en belastning i tillegg til de eksisterende.

Jeg har tilført et spørsmålstegn i overskrifta og utelatt ordet didaktiske. Er disse metodene nye didaktiske prinsipper? Krever ny teknologi nye didaktiske prinsipper? Egentlig ikke. Didaktikken er tuftet på kognitive prosesser og epistemologiske standpunkt. Slike framgangsmåter, som de over, er ikke ukjente for pedagoger, men er snarere praktiske undervisningsmetoder hvor ny teknologi, og de muligheter det gir, utnyttes med bakgrunn i gammel didaktikk. Målet er god konstruksjon av begrep samtidig som vi sikrer det vi måtte mene skal være igjen av det gamle håndverket.

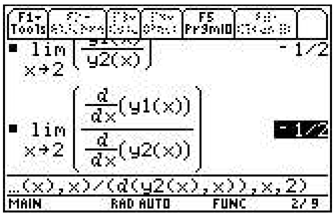
En ny mulighet som CAS gir er at elever som ikke får med seg et emne (f. eks. delvis integrasjon) kan fortsette med støtte i teknologien. Byggesteinene kan erstattes (se Rothery 1995 og Kutzler 1994)

Et eksempel: L'Hôspitals regel

La oss også se på et eksempel på hvordan fasene over kan benyttes i en undervisningssituasjon. Jeg vil ta for meg L'Hôspitals regel. I læreboka vi benytter (Sinus) introduseres denne regelen ved å se på uttrykket $\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-10x+12}{x^2-4}$. Ved å lede elevene kan de sjøl slutte seg til regelen. Teller og nevner legges inn som hver sin funksjon. Elevene tegner opp grafene og zoomer seg inn i punktet der x = 2. De kan også tegne tangentene til funksjonene i dette punktet. Kan det da tenkes at forholdet mellom de to må være det samme som forholdet mellom den deriverte av de to funksjonene?



I neste omgang kan en eksperimentere litt algebraisk:



Etter å ha sett at slik kan være tilfelle, er det på tide å se om det alltid stemmer, altså et bevis. I neste omgang gjenstår anvendelse av regelen.

Hvordan påvirkes elevenes læreprosess ved bruk av et CAS?

Hvordan elevenes matematikkunnskaper påvirkes ved bruk av et CAS kan en finne noen svar på fra forskningen. Mayes (1997) kommer til denne konklusjonen etter å ha gått gjennom alle de arbeider han hadde greid å finne per 1995:

> *There is compelling evidence that fully integrating a CAS into the curriculum as a cognitive tool within the constructivist perspective can have positive effects on mathematics learning*

Mayes anbefales lest i sin helhet for en fullstendig oversikt. I kort form kan en del av de mest positive resultatene oppsummeres slik:

- bedre begrepslæring
- bedre bevaring av regneferdigheter
- bedre holding til matematikken

Men, denne forskningen er ikke enkel. Her er det svært mange parametere som kan være vanskelig å holde under kontroll: elevene, læreren, læreboka, kalkulatoren, måten den brukes på og så videre. Ofte er forskningen kvantitativ med en kontrollgruppe hvor de samme parameterne er tilstede. Det fins også eksempler på kvalitativ forskning, men å gi all kreditt til et CAS er like vanskelig. I en forsøkssituasjon er som regel læreren entusiastisk, det brukes mye tid på et godt undervisningsopplegg og kanskje settes det inn ekstra ressurser. Her ligger det utfordringer til framtidig forskning.

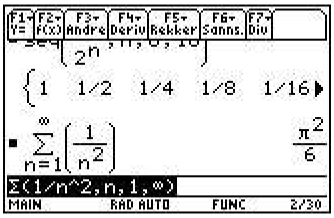
Et argument som ofte trekkes fram til kalkulatorens fordel finner vi hos Kutzler (1997) som hevder at det er mulig å skille ut to prosesser når elever skal utføre algebraiske oppgaver: Valg av operasjonen som skal utføres (choosing) og anvendelse (applying) av algoritmen som skal til for å utføre den. Argumentet til Kutzler er at i de fleste algebraiske prosedyrer vil valg av operasjon til stadighet avbrytes av anvendelsen. Han mener derfor at bruk av symbolregneren øker konsentrasjonen på valget av operasjonen og lar elevene på denne måten få umiddelbar tilbakemelding om resultatet. Slik øker evnen til problemløsing. Det kan godt være at han har rett, men så langt har jeg ikke funnet noe forskning på elevens samspill med kalkulatoren. I informatikken er dette et voksende fagfelt kjent under navnet HCI = Human Computer Interface. Blir ikke elevene også avbrutt av å taste inn, og tolke, resultatet på kalkulatoren? Interaksjonen mellom bruker og kalkulator er, så langt jeg kan se, ikke studert i den grad det kunne være ønskelig. Her fins enda flere forskningsoppgaver.

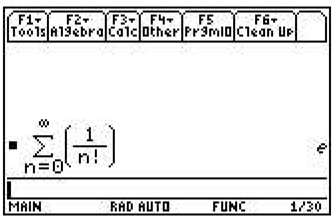
Våre og andres erfaringer

Ved Adolf Øiens skole mottok vi et klassesett med TI89 kalkulatorer i slutten av oktober 1998. Elevene i den 2MX-gruppa som har vært med på dette forsøket er ei nokså homogen gruppe når det gjelder prestasjoner. Det har i de siste årene vært høye opptakskrav til skolen og gode prestasjoner på de som har valgt å fortsette med matematikk i andre klasse.

Da vi tok i bruk den nye kalkulatoren hadde vi allerede gjort oss ferdig med en del tema og sto foran en heldagsprøve, noe som gjorde at de nye lommeregnerne ikke ble tatt skikkelig i bruk før det hadde gått ei stund. Alle elevene mottok kalkulator og bruksanvisning på engelsk og ble i startfasen oppfordret til å prøve å sette seg inne virkemåten. Særlig en del av gutta gikk energisk i gang med det nye verktøyet. I løpet av kort tid mestret de fleste elevene de mest vanlige funksjonene. Min erfaring er derfor at innføringen og bruken av lommeregneren går greit. Elevene lærer seg syntaks og tastetrykk raskere enn forventet. Dette at elevene er mer smidig i sin tilpasning til ny notasjon enn vi trodde, faller sammen med resultater også andre har kommet fram til (Tynan og Asp 1995). Som et eksempel kan jeg nevne at på den første prøven vi hadde like etter vi mottok TI89 fikk elevene i oppgave å bruke kalkulatoren til å finne den andrederiverte til en funksjon. Alle elevene løste den oppgaven.

Vi startet opp med rekker. TI89 har kommandoer som kan danne følger og finne summen av rekker. Det satte oss i stand til å se litt ut over de to rekketypene vi finner i 2MX:





I sannsynlighetsregning, som var det neste tema, hadde ikke TI89 så mye nytt å tilføre i forhold til TI83 som har vært benyttet tidligere.

I trigonometridelen, som vi holder på med nå, har elevene hatt tilgang til eksakte løsninger av trigonometriske likninger og eksakte verdier til sinus, cosinus og tangens. En del av oppgavene har de løst med metoder jeg ikke hadde forventet.

TI89 har blitt et arbeidsredskap hvor elevenes bruk har vært langt mer fantasifull en hva jeg hadde forutsett. Jeg kan ikke annet enn å la meg begeistre av denne muligheten til diskusjoner om løsningsmetoder, sammenligninger av svar mellom fasit og kalkulator og muligheter til andre representasjoner av matematiske begrep. Elevene har ved flere anledninger fått i oppgave å sette seg i grupper hvor oppgaven har vært å finne et opplegg for å overbevise medelevene om ett eller annet, som for eksempel sammenhengene mellom sinus og cosinus, hva den deriverte til sinus må være og så videre. Resultatene har vært svært gode.

Jeg mener også at hyppigheten av spørsmålet: «Hva har jeg gjort feil i denne utregningen?» har avtatt. Med den støtte de finner i TI89 har de vært i stand til sjøl å finne svaret. Brukt på denne måten kan et CAS bedre de manuelle regneferdighetene?

Jeg mener også å kunne se en forandring i arbeidsmåten. Ved bruk av teknologi kan elevene sjøl i større grad eksperimentere for så å undre over resultatene. En slik "hva-skjer-hvis-undersøkelse" er viktig både for en framtid i vitenskap eller næringsliv og for læringen.

En slik arbeidsmåte kommer ikke automatisk med kalkulatoren, men er i stor grad preget av Piaget og konstruktivismen. Allikevel faller denne formen lettere nå enn tidligere.

Hva mener elevene om bruken?

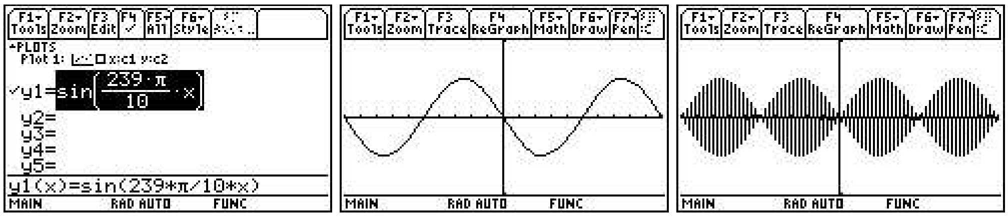
Jeg har gitt mine elever noen spørsmål og her følger noen svar med kommentarer:

- Syns du at TI89 er lett å bruke?
  Kommentar: Alle sier at kalkulatoren er lett å bruke, men en elev har denne kommentaren:
  Til de letteste og vanligste ting er den lett å bruke, men med en gang operasjonen som skal gjennomføres blir litt mer komplisert får jeg større problemer.
- Har du blitt mer avhengig av kalkulator etter at du fikk TI89?
  Kommentar: Dessverre (?) er det enighet også på dette punktet, alle sier de er blitt mer avhengig. Her er noen utdrag:
  Avhengig av kalkis, mer enn før: Definitivt! Den gjør det mye lettere å gjøre de fleste utregninger og da blir du fort avhengig.
  Jeg er allerede avhengig av kalkulator, så jeg tror ikke jeg har blitt mer avhengig etter at vi fikk TI89
  Jeg er helt avhengig og lærer derfor ikke så godt å regne ut uten kalkisen
- Har den forandret måten du jobber på?
  Ja, mer tid på tenkingen. Når jeg har funnet ut hvordan jeg vil regne det ut, går resten veldig fort.
  Bruker kortere tid på oppgavene.
  Jobbemåten har blitt forandret ved at jeg bruker mer tid på andre problemer fordi TI89 løser likninger, gjør om på uttrykk og så videre.
  Jeg er flinkere nå til å være mer nøyaktig i mine utregninger.
  Kalkisen fungerer som en slags fasit, som det er greit å sjekke svar opp i mot. Jeg tror faktisk at den er med på å endre tankegangen litt slik at jeg hmm...Det er i alle fall positivt.
  Jeg vil si at jeg er blitt mer kreativ og har bedre analytisk sans.
  Jeg utforsker alternative muligheter for å løse oppgavene og det syns jeg er bra.
- Syns du matematikkundervisningen har blitt mer eller mindre interessant?
  Kommentar: I svarene fordeler seg på uforandret eller mer interessant i like store grupper. Egentlig et håpløst spørsmål siden de mangler et reelt sammenligningsgrunnlag.
  Den er faktisk blitt mer interessant.
  Matte er like interessant med og uten TI89. Det som er litt gøy er når vi lager grafer!
  Matematikken er blitt morsommere fordi vi kan kontrollere svar og slipper å spørre læreren hver gang noe er galt.
  Næsj...ikke egentlig
  Mer interessant. Slipper all den kjedelige slavearbeidinga
  Jeg tror ikke at TI89 er veien å gå for å frelse uinteresserte elever.

- Anbefaler du TI89 brukt til alle elever?
  Kommentar: Alle anbefaler bruken til andre
  Jeg anbefaler andre elever å bruke den fordi man slipper mellomregninger å kan heller finne ut hvordan ting faktisk fungerer.
  Om det er meningen at alle skal kjøpe en kalkulator til 1500kr blir nok ikke det mottatt like positivt av alle.
- Andre kommentarer
  Kalkisen er fin å se på

Problemer har vi også opplevd. En gjenganger er innstilling av utsnittet for hva som skal vises ved opptegnig av grafer. Sjøl om vi ikke har opplevd det ennå kan det også vises eksempler på at TI89 tar feil i sine utregninger.

Vi har heller ikke støtt på problemer med oppløsningen, men dette kan være et problem. Se bare hvor forskjellig denne funksjonen ser ut etter hvor mange piksler det er mellom hvert punkt grafen går gjennom:



Av ikke-tekniske problem er at elevene blir litt for avhengig av bruken. De er ikke sikker før de har fått sjekket med kalkulatoren. Den stoler de derimot litt for mye på og er sikre på at fasiten er feil med en gang de kommer fram til et svar som ikke stemmer. Som oftest er det nok eleven som har tastet feil.

Andres erfaring

Fra Østerrike kan en også ta med seg noen erfaringer. De startet de tidlig med å bruke Derive i undervisningen. En generallisens for alle landets skoler ble kjøpt inn og tatt i bruk. I tillegg ble det opprettet forskningsprogram for studier av effekten av bruken. Noen konklusjoner derfra:

- mer eksperimentell, elevorientert undervisning
- mer anvendelsesorientering
- nye didaktiske prinsipp
- nye angrepspunkt ved problemløsing

(Lechner 19xx)

Evaluering

Evaluering av elevene finner sted i mange former. Ved innføring av symbolbehandlende lommeregnere vil det være nødvendig å diskutere eksamensformen. Holder vi oss til den tradisjonelle rammen, med en fem timers skriftlig eksamen, har vi disse mulighetene for hvordan denne kan avvikles:

- symbolregnende lommeregner tillatt under hele eksamen med oppgaver hvor elevene har nytte av den
- symbolregnende lommeregner tillatt under hele eksamen hvor oppgavene er slik at nytten er minimal
- en blanding av de to over
- symbolregnende lommeregner tillatt bare ved deler av eksamen
- eksamen uten bruk av kalkulator

I denne debatten om eksamensform lander mange på en delt eksamen hvor kalkulatoren legges bort i deler av tiden. Jeg heller i den retning at dette hjelpemidlet skal være tilgjengelig hele tiden. Skal et CAS tas i bruk i undervisningen er det for meg naturlig at dette benyttes i alle situasjoner, også til hele eksamen og at de vil få bruk for kalkulatoren under prøven. Eksamen er viktig som retningslinje for undervisningen enten en liker det eller ikke. Ved å ikke tillate kalkulatoren brukt under hele eksamenssituasjonen er jeg redd det signaliserer en økt vekt på pugg og drill. Ikke minst på grunn av at elevene er tillatt å bruke grafisk kalkulator etter dagens regler. Er det slik at den manuelle regneferdigheten er viktig for forståelsen vil en mangelfull ferdighet også gi utslag i prestasjonene.

Manuelle regneferdigheter kan en teste på prøver gitt gjennom året. Elevene kan da vise at det grunnleggende beherskes før teknologien tillates brukt (se White box-black box).

Ønsker en ved eksamen å teste elevens egne regneferdigheter må oppgavene forandres til en viss grad, men det må være mulig å utforme oppgaver på en slik måte at elevens forståelse av algoritmer eller regneferdighet i det samme stilles på prøve. Med grafisk kalkulator var det nok å spørre etter eksakte svar for å få elevene til å ta i bruk manuelle teknikker. Med et CAS tilgjengelig kan en be eleven om å gjøre grundig rede for hvilke regler som benyttes under utregning eller gi oppgaver hvor kalkulatoren ikke kommer opp med ønskelig svar eller ikke er til hjelp. Noen eksempler som vi har hatt på prøver:

- Finn et enklere uttrykk for: $\lg 9x4 - 2\lg 3x - 4\lg\sqrt{x}$
- Gi en forklaring på at $\frac{30}{x^2-4x-5}+\frac{5}{x+1}=\frac{x}{x-5}$ ikke har noen løsning

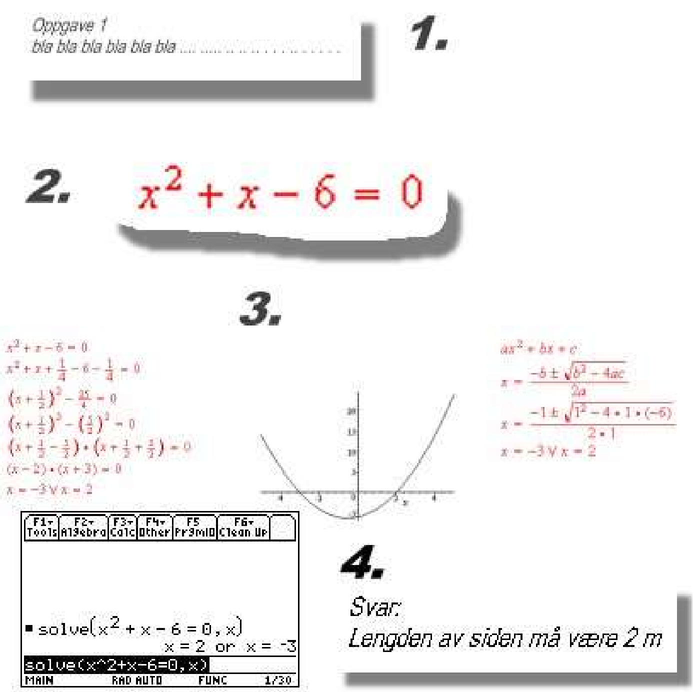
En kan også tenke seg en muntlig del hvor slikt tas opp.

Ved bruk av prosedyrer som svarte bokser har Stacey (1997) foreslått disse kriteriene:

> *a. they know what the procedure is for*
> *b. they know what sort of input is required*
> *c. they know under what conditions the procedure can be used*
> *d. they can make sense of the answer that the software produces*
> *e. they have some capacity to detect errors in the answer given by the software (sufficient to guard input errors, for example)*

Med dette som utgangspunkt kan en formulere oppgaver hvor elevenes oppfatning av algoritmer som svarte bokser kan vurderes. Slike kriterier kan hjelpe oss til å evaluere eleven og ikke teknologien. Det er viktig å skille de kognitive oppgaver eleven sjøl skal utføre og hvilke oppgaver som kan delegeres til lommeregneren.

Trenden i den videregående skolen går mot mer problemløsende oppgaver som ofte er åpne i formen. Det er elevens helhetlige kompetanse skal evalueres. Eleven må velge hva hun skal gjøre og hvordan dette skal løses og i tillegg vurdere resultatet. Denne kompetansen er ment å gi eleven «et meningsfullt og rikt liv» (Veiledning i løsning av oppgaver som prøver helhetlig kompetanse, SUE januar 1999). Sentralt vil da problemløsing være og ikke metode. I slike oppgaver vil elevene ha mange veier fram til målet. Et CAS vil være en av dem og elevene må sjøl være i stand til å velge rett verktøy til rett jobb. I figur 1 har jeg prøvd å illustrere dette. En oppgavetekst (1.) må tolkes og eleven må komme fram til en matematisk modell eller et uttrykk som kan løse problemet (2.). Neste skritt blir da å finne en løsning på denne. Til hjelp vil da eleven ha flere metoder (3.). Etter å ha funnet svaret må dette tolkes på en slik måte at det tilfredsstiller kravene gitt i oppgaven. Slike oppgavetyper stiller mye større krav til elevene enn hva tilfellet er når vekten er lagt på oppgaver som bare tester en av metodene i trinn 3. Veien fra trinn 1 til 2 er det som ofte faller vanskeligst. De kunnskapene som kreves for å være i stand til dette er også de som det er vanskeligst å finne god undervisningmetodikk for.



Figur 1

Siden det er disse oppgavetypene som etter hvert dominerer eksamssettet vil ikke tilgangen til et CAS gi hjelp til noe annet enn trinn 3. I denne fasen vil de bli stilt overfor valget når skal kalkulatoren brukes og når ikke. Skal x^2 deriveres bør ikke kalkulatoren slås på. Det vil sinke oppgaveløsningen. Evaluering av de problemløsende ferdigheter er altså upåvirket av hjelpemiddel.

Andre oppgaver som bør være aktuelle er oppgaver av typen: «Løs denne oppgaven på fem forskjellige måter, diskuter fordeler og bakdeler ved metodene og gjør til slutt greie for hvilken metode du anbefaler brukt med en begrunnelse for hvorfor».

Elevene er ikke alltid så glade i problemløsende- og «annerledes» oppgaver. På prøver ber de om å få algoritmer som kan pugges dagen før. Tidligere har vi sett at elevene kunne berge en ståkarakter hvis de løste de oppgave med reine utregninger. Hvis de ikke vil være der blir eksamen vanskeligere.

Et blikk framover

Gjennom en del år i skolen har jeg vært vitne til mange spådommer om den teknologiske utviklinga. Tidlig på åttitallet ble det hevdet som svært sikkert at elevene ville sitte med en bærbar datamaskin framfor seg i klasserommet innafor et tidsperspektiv på mindre enn ti år. Da ville prisen ha nærmet seg null. Det var muligens fornuftige tanker den gang.

Jeg vil allikevel prøve meg med noen framtidsvyer. Den symbolregnende lommeregneren er kommet for å bli. Prisen på TI89, som kom seinhøsten 1998, er nå under 1000 kr (i alle fall som lærertilbud). Casio er like rundt hjørnet med en konkurrerende modell. Alle elever ble ved innføringen av Reform 94 pålagt å skaffe seg en lommeregner til omtrent samme pris.

Økonomiske argumenter skulle ikke være tilstede i noen grad ut over det som er tilfelle for den grafiske kalkulatoren. Den eneste grunnen til at slike verktøy ikke skal finne sin plass i skolestua er derfor at vi bestemmer at den skal holdes utafor. Til tross for dette vil teknologien være tilgjengelig for elevene utenom skolen. Jeg tror derfor at symbolregnerne vil være et verktøy, på linje med den grafiske lommeregneren, i matematikkundervisninga innen kortere tid enn mange er klar over.

Innholdet i skolematematikken

Hva vil da skje med matematikkundervisninga framover med et CAS tillatt brukt? Vil da matematikken helt forandres?

Løsning av andregradslikninger har vært «pensum» for matematikkelever verden over siden babylonerne greide å løse slike for fire tusen år siden. Opp gjennom historien har dette vært gjort etter forskjellige metoder, men resultatet har vært det samme. Det samme kan en si om de fleste emnene vi tar opp i skolen sjøl om ikke har en så lang historie. Matematikkens natur vil neppe forandres ved innføring av ny teknologi som muliggjør nye metoder. Leinbach m. fl. (1997) har gitt denne kommentaren:

> *It is our belief that the nature, value, and importance of the maths-curriculum will not be changed by the introduction of a CAS*

Vi lar også Leinbach m.fl. klargjøre sitt curriculumbegrep: *a set of ideas that direct us when we consider the specific goals for an individual who has completed the study of mathematics at the secondary level* (ibid.)

Forandringen vil måtte komme når det gjelder hvordan vi omsetter dette til mer detaljerte mål i læreplanen, hvordan vi skal oppnå disse målene og for hvordan vi løser de matematiske problemene. En stor forandring vil de symbolregnende lommeregnerne også få for arbeidsmetoder. Kort sagt kan en si at hva elevene gjør vil være mer eller mindre uforanderlig, men hvordan de gjør det blir forskjellig.

Historisk har skolematematikken lagt stor vekt på algoritmer og regneoperasjoner. Det gjør vi fortsatt, men mye er forandret. Matematikken i den videregående skolen er etter Reform 94, i større grad enn tidligere, et problemløsende fag. Intensjonene er i dag langt fra avgrenset til å lære elevene å utføre algoritmer, løse likninger og pugge framgangsmåter for så i neste omgang finne ut i hvilken grad de er i stand til å utføre dette. Sjølsagt kan en finne variasjoner fra lærer til lærer og fra det ene læreverk til det andre, men intensjonene slik vi ser dem i læreplanen og ikke minst til eksamen, synes klare.

Slike mål vi setter oss for elevene som problemløsere og hvilke matematiske begrep de skal danne, vil i liten grad påvirkes av den teknologiske utvikling.

Det viktigste spørsmålet som melder seg er da: Hva blir den manuelle regneferdighetens rolle? Svaret på dette splitter bidragsyterne i debatten. Mens noen mener at vi kan overlate alt til teknikken er det andre som er av den oppfatningen ferdigheter med papir og blyant bør være sentrale i all framtid. Uansett synspunkt må vi bli enige om hvilke fundamentale regneferdigheter vi ønsker at elevene skal kunne utføre uten bruk av kalkulator. Her har vi allerede svart at rotuttrekking med blyant og papir, logaritmetabeller, m.m. ikke er aktuelt lengre. Kanskje kan vi nå finne flere. Internasjonalt går også denne debatten, og kan bl. a. følges i Mathematics Education Dialogues som gis ut av National Council of Teachers of Mathematics eller på nyhets- og postgrupper på Internett. Det synes å være enighet om at de algoritmene og ferdighetene vi skal sitte igjen med må være viktige for forståelsen av matematiske begrep på et seinere tidspunkt. I diskusjonen videre stopper enigheten.

Frykten for at tilgjengeligheten til en symbolbehandlende lommeregner vil svekke elevenes evne til å utføre symbolregning for hand, er for mange et viktig argument for å holde disse kalkulatorene bort fra elevene. Er dette konsekvensen? Legger vi opp undervisningen for å unngå en slik effekt med de prinsipper som skisseres av bl.a. Buchberger viser erfaringer fra Østerrike at vi har lite å frykte (jeg venter fortsatt på dokumentasjon som jeg er blitt lovt). I de algoritmene vi finner nødvendig for forståelsen må vi sørge for at elevenes ferdigheter er tilstede. Hvis det for enkelte andre algoritmer skulle vise seg at elevenes ferdigheter ikke skulle være på høyde med hva tilfellet var tidligere er det da et problem? Det kan det være, men bare hvis denne ferdigheten vil være viktig for elevene enten i det daglige liv, i kommende arbeid eller videre studier. Det daglige liv, i hvert fall mitt, stiller meget små krav til matematiske kalkulasjoner for hand. Kommende arbeid vil i framtida stille et mye større krav til problemløsende- og sosiale evner enn algoritmer på papir (se Mathematics Education Dialogues vol. 1/1). Så var det de kommende studiene. Her er det avhengig av hvilke studier, men like viktig er det om de som overtar våre elever er villige eller i stand til å tilpasse seg en ny studentmasse. Ikke studenter med mindre matematikkunnskaper, men mindre trening i "papir-og-blyant-algebra".

Vår oppgave blir å skille ut de trivielle og overflødige oppgavene og beholde de erfaringer våre elever må ha for å utvikle en god forståelse for matematikk og skape et miljø hvor CAS vil være både tilgjengelig og anbefalt. Problemet blir da å finne hvilke ferdigheter i manipulasjon som er nødvendig for forståelse og så finne tidspunktet for innføring i disse. Ved å gjøre dette finner vi også de ferdighetene (papir og blyant) som nå vil være overflødige.

Ved å utnytte et CAS vil det være mulig å stokke om på rekkefølgen på emnene som tas opp. Mens vi tidligere var avhengig av å vente med tema til elevene hadde de nødvendige ferdigheter i teknikker, kan vi nå overlate teknikkene til et CAS og introdusere temaet når det måtte passe. Sett over et lengre tidsrom vil det være naturlig at denne rekkefølgen vi har i dag forandres. Teknikker og algoritmer som er nødvendig for seinere forståelse vil det være naturlig og ta opp når den tid kommer. Faktorisering av polynomer er noe som en lett kan gjøre med et tastetrykk, men skal en på et seinere tidspunkt forstå algebraens fundamentalteorem kommer en neppe utenom å beherske ferdigheten med faktorisering uten bruk av kalkulator. Må elevene i den videregående skolen lære faktorisering bare fordi de en gang skal være i stand til å forstå kompliserte bevis på universitetsnivå? Hva med delvis integrasjon? Kjerneregelen?

Resultatet av den støtte elevene kan få av tekniske hjelpemidler bør være at tema flyttes til et nivå hvor det vil være av avgjørende betydning at de beherskes. Kan det ikke argumenteres for at et emne er av en slik betydning vil vi også kunne se at det forsvinner fra skolen. Viktigst i denne debatten er ikke om de skal lære et emne, men når.

Interessant i den samme debatten rundt grunnskolens matematikkundervisning er innspill hvor en ønsker større vektlegging på hoderegning og mindre bruk av papir og blyant (Waits og Demana 1998; Ralston 1998). Den svenske matematikkdidaktikeren Olof Magne (1994) har i sine arbeider vist at mye av den tid som går med til innlæring av papir og blyant aritmetikk i grunnskolen kan være bortkastet. Viktige argument for bruken av teknologi er å spare elevene for unødig terping av algoritmer for å få mer tid til problemløsing, hoderegning og begrepsdannelse. Gjelder dette også for CAS på høyere nivå?

Det er også sterke krefter som trekker i andre retninger. Resultat av ytterliggående synspunkt den andre veien kan en se i USA hvor California State Board of Education har gått til det skritt å forby bruk av kalkulatorer i alle sine tester opp til K-6. I England finner en også at denne «back to basic filosofien» står sterkt. Blairs regjering oppfordrer i en rapport, DFEE (sitert av Ralston 1998), til å unngå «as far as possible the use of calculators» opp til 11-årsalderen.

For tiden er læreplangrupper i gang med å lage nye læreplaner i matematikk for den videregående skolen. De har ikke tatt utgangspunkt i at symbolregnende kalkulatorer skal benyttes, men har hatt det i bakhodet at det kan bli aktuelt i nær framtid.

Om ikke forandringen kommer nå er det trolig at vi vil kunne se at læreplanene i framtida vil dreie ytterligere i retning av problemløsing slik Leinbach m. fl. spår i dette sitatet:

> *[...] The long term effect is that there will be a change in the character of the mathematics curriculum to one in which students are actively involved in problem solving as a major mathematical activity.* (Leinbach m.fl. 1997)

I Østerrike startet de tidlig med å bruke Derive i undervisningen. Etter dette er læreplanene forandret i retning av mer problemløsing og økt vekt på samarbeidslæring.

Vi kan også om ønskelig utvide læreplanen ved å ta med mer avanserte emner, men antall emner som har fått plass er etter min mening mange nok. Da ønsker jeg meg heller mer tid til eksperimentering og prosjektarbeid.

Læreplanene er bare en faktor for innholdet i matematikkundervisninga. Skoletradisjonen er en annen og ofte tungt foranderlig faktor. Dette til tross, det viktigste målet for all matematikkundervisning må være å få elevene til å beherske matematisk tenking noe verken datamaskiner eller lommeregnere ikke kan. For å nå dette må matematikkundervisningen forandres i denne retningen:

Fra	**Til**
rutiner	innsikt
lærergjennomgang	elevoppdagelser
å arbeide med gjentatte typeproblem	å arbeide med begrep
å arbeide med oppgaver skåret over samme lest	å arbeide med realistiske og virkelighetsnære problem ved problemløsing
å gjøre	planlegge, oversette
kunnskap om utregninger	kunnskap om strategier
reproduktiv læring	aktiv, eksperimentell læring

(Fritt etter Leinbach m. fl 1997, Felsager og Nissen 1996)
Dette stiller store krav til nye lærebøker, særlig da arbeidsbøker hvor eleven oppmuntres til forsøk og eksperimentering med det utgangspunkt at eleven betraktes som aktivt konstruerende av egen matematikkunnskap. Slike lærebøker har jeg til gode å se på norsk. Eksempler hentet fra utlandet er Kelly (1997).

Konklusjon

Brukt på en forsvarlig pedagogisk måte ser jeg ikke så mange betenkeligheter ved å innføre dette som et verktøy, men jeg vet at slettes ikke alle er enige i det. Blant mine argumenter er at multiple representasjoner, det å kunne veksle lett mellom algebraisk, grafiske og numeriske eksempler gir store fordeler for læringsprosessen. De virkelighetsnære oppgavene det legges vekt på til eksamen kan bli mer virkelighetsnære enn hva tilfellet har vært til nå. Mulighetene for gode prosjektarbeid er mye større fordi elevene kan få utført beregninger de ikke ville vært i stand til tidligere. I menyene på lommeregneren og i brukermanualen (TI89 leveres med en på 557 sider) finner mange elever spennende matematikk de ønsker å vite mer om. Elevene gis muligheten for å løse et problem på mange forskjellige måter. Mine elever legger også stor vekt på den betydning kalkulatoren har som fasit når de gjør matematikkoppgaver.

Standardspørsmålet om: «Hva har jeg gjort feil her?» kan eleven sjøl finne svar på ved å kontrollere enten med andre metoder eller undersøke utregningene trinn for trinn.

Men, ved å la alle få ta del i bruken av en slik kalkulator må gode metoder utvikles og lærere må få god opplæring og støtte. Ikke minst på grunn av at læreren er ikke lenger er den som sitter med fasiten. Det er en ny rolle som kan medføre en del usikkerhet.

Samtidig må vi også sikre oss at elevene ikke blir for avhengige av å bruke lommeregneren. Særlig gjelder det hvis misbruk fører til at de ikke får den erfaringen som er nødvendig for forståelsen. Det kan vi løse.

Noen adresser på Internett

Hjemmesida til Texas Instrument: *http://www.ti.com/calc/*

Min hjemmeside med stoff til elevene: *http://www.adolfoien.vgs.no/pergo/*

Tysk side med en del lenker: *http://wwwlehrer.rz.uni-karlsruhe.de/~za242/CAS/*

Best finner du stoff ved å søke sjøl.

Referanser

Buchberger, B. 1990. Should Students Learn Integration Rules? *SIGSAM Bulletin Vol.24/1, pp.10-17.*

Cornu, B. 1991. Limits. I: *Advanced Mathematical Thinking*, redigert av D. Tall, Dordrecht: Kluewer

Dubinsky, E. og D. Tall. 1991. Advanced Mathatical Thinking and the Computer. I: *Advanced Mathematical Thinking*, redigert av D. Tall, Dordrecht: Kluewer

Dubinsky, E. og G. Harel. 1993. The Nature of the Process Conception of Function. I : *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, redigert av G. Harel og E. Dubinsky, MAA Notes (vol. 25)

Felsager, B og K. Nissen. 1996. *TI-92 kursusbogen*. Matematiklærerforeningen

Heugl, H. , B. Barzel og A. Furukawa. 1997. The Influence of Computer Algebra in the Teaching and Learning ogf Mathematics. I: *The State of Computer Algebra in Mathematics Education*, redigert av J. Berry, J. Monaghan, Bromley: Chartwell Bratt

Heugl, H. 1998. *The Influence of Computeralgebra Systems in the Function concept*, ICTM Conference, New Orleans

Hillel, J. 1993. Computer Algebra Systems as Cognitive Technologies: Implication for the Practice of Mathematics Education. I: *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology*, redigert av C. Keitel og K. Ruthven, Berlin: Springer Verlag

Kelly, B. 1997. *Investigating Advanced Algebra with the TI92*. Ontario: Brendan Kelly Publishing Inc.

Kelly, B. 1997. *Investigating Calculus with the TI92*. Ontario: Brendan Kelly Publishing Inc.

Kelly, B. 1997. *Investigating Statistics with the TI92*. Ontario: Brendan Kelly Publishing Inc.

Kutzler, B. 1994. DERIVE - the future of teaching mathematics. *International DERIVE journal*, 1, 1, 37-48

Kutzler, B. 1997. Towards Computer Age Maths Teaching with the TI-92, I: *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education, vol 4*

Lechner, J. 19xx. *Erfarhungen aus dem Österreichischen Derive-Projekt*, WWW-dokument: http.//www.zs-augsburg.de/rs/cas/lechner.htm

Lehtinen, E. og Repo, S. (1996). Activity, social interaction and reflective abstraction: Learning advanced mathematical concepts in a computer environment. I: *International perspectives on the design of technology-supported learning environments.*, redigert av S. Vosniadou, E. de Corte, R. Glaser og H. Mandl, Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum

Leinbach, C. , K. Aspetsberger, B. Barzel, K. Fuchs, A. Furukawa, H. Heugl, G. Mann, A. Rothery, T. Sato og F. Schweiger. 1997. The Curriculum in a CAS environmet. I: *The State of Computer Algebra in Mathematics Education*, redigert av J. Berry, J. Monaghan, Bromley: Chartwell Bratt

Magne, O. 1994. Matematikinlärning i teori och praktik inför 2000. *Pedagogisk-psykologiska problem, 591* Malmö: Lärarhögskolan

Mayes, R. 1997. Current state of research into CAS in the mathematics education. I: *The State of Computer Algebra in Mathematics Education*, redigert av J. Berry, J. Monaghan, Bromley: Chartwell Bratt

Norcliff, A. 1996 The Revolution in Mathematics due to Computing I: *Teaching and learning Undergraduate Mathematics* www-dokument: http://www.bham.ac.uk/ctimath/talum/newsletter/talum4.htm

Park, K. 1993. A comparative study of the traditional calculus course vs. the Calculus & Mathematics course. (University of Illinois at Urbana-Champaign, 1993). *Dissertation Abstracts International, 54,* 119A.

Ralston, A. 1998. *Let's Abolish Pencil and Paper Arithmetic* , kladd for publikasjon i kommende nummer av Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching. WWW-dokument: http://www.doc.ic.ac.uk/~ar9/abolpub.htm

Rothery, A. 1995. Computer Algebra and the Structure of the Curriculum. I: *Technology in Mathematics Teaching - a bridge between teaching and learning*, redigert av L. Burton og B. Jaworski, Chartwell-Bratt

Scottish Consultative Council on the Curriculum 1998. *Advanced Calculators and Mathematics Education: A paper for Discussion and Consultation*

Stacey, K. 1997. Computer algebra: The coming challenge for the mathematics curriculum. *Vinculum 34* (2) Mathematical Association of Victoria

Tall, D. 1985. Understanding the Calculus. *Mathematics Teaching* 110:49

Tynan, D. og Asp, G. 19xx. *Exploring the Impact of CAS in Early Algebra.* WWW-dokument: http://www.edfac.unimelb.edu.au

Waits, B. K. og F. Demana. 1998. The Role of the Hand-Held Computer Symbolic Algebra in Mathematics Education in the Twenty-First Century: A Call for Action. Invited Paper, *NCTM Standards 2000 Technology Conference*, Washington DC