# Grenseverdier

## Hva er en grenseverdi?

Det er det spørsmålet vi må slite med ei stund framover. Dette begrepet er ikke lett å få taket på, men vi må prøve.
En grenseverdi er en bestemt verdi!
Det vil med andre ord si et tall, altså 1, 234, 2.78 eller hvilken verdi som helst. I noen tilfeller vil vi se at denne verdien ikke eksistere.

## Hvordan skriver vi grenseverdier matematisk?

Grenseverditegnet kommer av ordet *limes* som på latin betyr grense. Du kjenner sikkert ordet igjen fra engelsk limit. Når vi har en grense, må vi vite hvilken. Under grenseverdien skriver vi ned det.
Grenseverdien av f(x) når x nærmer seg 7, skriver vi matematisk slik:

$$\boxed{\lim_{x \to 7} f(x)}$$

Avhengig av definisjonen på funksjonen f(x) vil vi enten komme fram til at det ikke eksistere en slik verdi eller verdien.

### Et eksempel:

Har vi at $f(x) = x + 3$, vil $\lim_{x \to 7} f(x) = 10$

I dette ligger det at f(x) kommer nærmere og nærmere 10 desto nærmere x kommer 7.
Da er vi ved definisjonen på grenseverdien som er den verdien (hvis den eksisterer) f(x) nærmer seg desto nærmere x kommer en annen verdi

## Hvordan finner vi grenseverdier?

Det første vi må gjøre er å se på hva som skjer med uttrykket når x nærmer seg den verdien vi skal finne grenseverdien for.
La oss se på to eksempler:

1) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$

Når $x \to 1$ ser vi (?) at både teller og nevner går mot null. Kan du se det? Prøv med å sette inn $x = 1$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$

Dette er et enkelt uttrykk hvor telleren vil være uforandret uansett hva x er, mens nevneren vil gå mot null.
Over er det beskrevet tre typer av uttrykk vi ønsker å finne grenseverdien av:

1. Uttrykk som går mot en bestemt verdi. Eks.: $\lim_{x \to 7} x + 3$
2. Uttrykk hvor både telleren og nevneren går mot null. Eks.: $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$
3. Uttrykk hvor telleren går mot en konstant mens nevneren går mot null. Eks.: $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$

For å finne grenseverdier må vi ofte gjøre om det matematiske uttrykket. I det første eksemplet over er ikke det nødvendig. Som regel er ikke det tilfelle. Grunnen til at vi ønsker å finne en grenseverdi er at det er noe spesielt akkurat med denne verdien. Som regel er da ikke uttrykket definert for denne x-verdien. Vi ønsker å se hva som skjer med det matematiske uttrykket når vi nærmere oss den x-verdien. Framgangsmåten for å finne grenseverdien avhenger av hvilken av de tre typene over vi har.
Det første du må avgjøre er derfor hvilken type uttrykk du skal finne grenseverdien for.

## Uttrykk som går mot en bestemt verdi.

Dette tilfellet er det elimentært. Vi setter bare inn x-verdien og har funnet grenseverdien.

## Uttrykk hvor både telleren og nevneren går mot null ($\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$).

Prøv å faktoriser og forkort. La oss se på et eksempel:

Finn $\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x^2+x-2}$

Funksjonen $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+x-2}$ er ikke definert for $x = 1$. $\frac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)}$ er ikke definert for $x = 1$.

Vi må derfor finne grenseverdien når x nærmer seg 1, ”grenseverdien når x går mot 1”. Vi kan ikke sette inn $x = 1$ direkte i funksjonen. Da blir både nevneren og telleren lik null, og det er matematisk meningsløst. Vi må regne ut grenseverdien ved å faktorisere. Her er det enkelt:

$$\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x^2+x-2} = \lim_{x\to1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x\to1} \frac{(x+1)}{(x+2)} = \frac{2}{3}$$

I noen tilfeller hvor vi ikke kan faktorisere kan vi bruke en regel som heter L’Hospitals regel.

## Uttrykk hvor telleren går mot en konstant mens nevneren går mot null ($\frac{\boldsymbol{k}}{\mathbf{0}}$).

I disse tilfellene fins ikke noen grenseverdi. Et eksempel:

Finn $\lim_{x\to0} \frac{1}{x}$

Når $x = 0$, vil telleren bli lik 1 og nevneren lik 0. Uttrykket vil vokse over alle grenser når x går mot 0. Vi skriver dette slik:

$\frac{1}{x} \to \pm\infty$ når $x \to 0 \Rightarrow \lim_{x\to0} \frac{1}{x}$ eksisterer ikke

Fullt så enkelt er det ikke å finne andre grenseverdier. Seinere skal vi se at:

$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Den er ikke så enkel hverken å se eller finne!