Potenser og potensregning

Per G. Østerlie

13. september 2013

1 Introduksjon

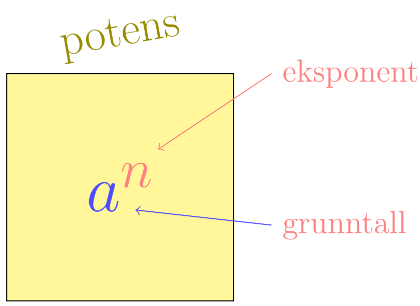
Dette er en introduksjon til hva potenser er og hvordan vi regner med potenser.

2 Hva er en potens?

En potens er en effektiv skrivemåte når vi har ett tall som skal multipliseres med seg sjøl flere ganger, slik som dette eksemplet viser:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$$

Potensen er 2^5 hvor vi kaller 2 for grunntallet og 5 for eksponenten. Her er en figur om summerer opp det.



Figur 1: En potens

3 Potensregler og definisjoner

Ut fra skrivemåten kan vi formulere flere regneregler for potenser. Her er en oppsummering av reglene. I utgangspunktet går vi ut fra at n , m er naturlige tall. Vi skriver det slik: $n, m \in \mathbb{N}$

3.1 Potensregler

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \tag{1}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \tag{2}$$

$$(a^n)^m = a^{nm} \tag{3}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \tag{4}$$

$$(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n} \tag{5}$$

I tillegg til regnereglene har vi to definisjoner som må gjelde for at regelene over skal stemme.

3.2 Definisjoner

$$a^0 = 1 \tag{6}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \tag{7}$$

4 Hvorfor stemmer disse regnereglene?

La oss starte med å se på den første regneregelen: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ og hvordan vi kan vise at den stemmer. Det kan vi gjøre ved å ta utgangspunkt i potenser som en skrivemåte.

Vi starter med et eksempel for å vise at

$$2^3 \cdot 2^4 = 2^7$$

La oss starte med å skrive om potensene og se hvordan vi kan komme fram til resulatet.

$$
\begin{aligned}
2^3 \cdot 2^4 &= \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{3 stykker}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{4 stykker}} \\
&= \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{7 stykker}} \\
&= 2^7
\end{aligned}
$$

Det var et helt spesielt tilfelle, men innfører vi bokstaver kan vi beskrive tankemåten for alle andre tall enn de vi har over. Slik blir det da:

$$
\begin{aligned}
a^n \cdot a^m &= \underbrace{a \cdot a \cdots a \cdot a}_{\text{n stykker}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a \cdot a}_{\text{m stykker}} \\
&= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a \cdot a \cdot a}_{\text{n+m stykker}} \\
&= a^{n+m}
\end{aligned}
$$

Var det komplisert? Se litt på det en gang til og tenk litt på hva som står der.

Hva da med de andre reglene? La oss se på den andre regneregelen:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Vi gjør det på samme måte og starter med et eksempel

$$\frac{2^5}{2^3}$$

Potensene skriver vi om og forkorter brøken. Se her:

$$
\begin{aligned}
\frac{2^5}{2^3} &= \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} \\
&= \frac{\cancel{2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot 2 \cdot 2}{\cancel{2 \cdot 2 \cdot 2}} \\
&= 2^{5-3} \\
&= 2^2
\end{aligned}
$$

Antar vi at $n > m$ kan vi skrive dette mer generelt slik:

$$\begin{aligned}
\frac{a^n}{a^m} &= \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a \cdot a}^{\text{n stykker}}}{\underbrace{a \cdot a \cdots a \cdot a}_{\text{m stykker}}} \\
&= \frac{\overbrace{a \cdot a \cdots a \cdot a}^{\text{m stykker}} \cdot a \cdots a}{\underbrace{a \cdot a \cdots a \cdot a}_{\text{m stykker}}} \\
&= a^{n-m}
\end{aligned}$$

På tilsvarende måte kan vi vise de andre potensreglene. Bare prøv!