Sannsynlighetsregning

Per G. Østerlie
Thora Storm vgs
per.osterlie@stfk.no

15. april 2013

1 Hva og hvorfor?

Hva?

Vi får høre at det er sannsynlig at et eller annet kommer til å skje. Sannsynligheten for å bli truffet av en meteoritt skal være 1 til 1700 000 000. Sannsynligheten for å dø av røyking blant røykere er 50 %. Statistisk sett er sjansen for å bli truffet av lynet $\frac{1}{23000}$.

Hva er så sannsynlighet? Hva forteller opplysningene over? I sannsynlighetsregninga skal vi finne en verdi for hvor sannsynlig noe er. Det kan vi oppgi som «1 til 1700 000 000» eller «50%» eller «$\frac{1}{23000}$». Alt dette er verdier som forteller hvor sannsynlig det er at noe skjer. I sannsynlighetsregninga skal denne verdien være mellom 0 og 1. Alle verdiene over kan vi skrive om til en slik verdi.

Hvorfor?

Hvorfor skulle vi være interesserte i å finne en sannsynlighet? Det er flere grunner til det. Her er noen eksempler.

Forretningsvirksomhet For den som driver butikk er det viktig å vite noe om sannsynligheten for å få solgt noe eller sannsynligheten for hva som vi skje i et marked. Tenk bare på vurderingene en aksjemegler må ta.

Forsikring All forsikring baserer seg på å vite noe om sannsynligheten for at et eller annet skjer. Ut fra det kan forsikringspremien settes

Investering Investeringsanalyse er sannsynlighetsregning

Spill Spiller du Lotto? Tipper? Sannsynligheten vil avgjøre om du vinner noe. Sannsynligvis gjør du ikke det.

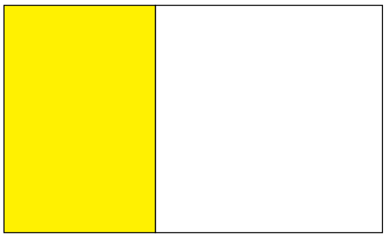
Risikoanalyse Når risiko vurderes er det stort sett basert på sannsynlighet.

Værmelding Bare se på yr.no eller liknende tjenester. Der oppgir de til og med sannsynligheten for at været blir som de melder.

Beskrivelser av sannsynlighet

Som et areal

Vi kan framstille sannsynlighet som et areal. Bruker vi bokstaven A som en erstatning for at noe skal skje, at du skal få en meteoritt i hodet eller vinne i Lotto, kan det gule arealet under vise hvor sannsynlig det er.



Tenk deg at dette er et åpent område og at det regner jevnt fordelt. Hvor stor del av de totale regndråpene vil falle på den gule delen? Svaret blir det samme som sannsynligheten for at A skal skje.

Som relativ frekvens

Når sannsynlighet defineres som relativ frekvens ser vi på hva som vil skje hvis vi gjentar et forsøk svært mange ganger. Skal vi finne ut sannsynligheten for at en tegnestift lander med spissen opp etter å ha blitt kastet må vi gjenta eksperimentet med den samme tegnestiften mange ganger. Holder vi på lenge nok, egentlig uendelig mange ganger, vil vi komme fram til en verdi.

Sannsynligheten for at tegnestiften lander med spissen opp finner vi ved å regne ut antall ganger den lander med spissen opp delt på antall ganger vi kaster. Var ikke det tungvindt å skrive? Dette er kanskje enklere?

$$\text{Sannsynligheten for spiss opp} = \frac{\text{Antall ganger med spissen opp}}{\text{Totalt antall kast}}$$

P og N

Probability er engelsk for sannsynlighet. Det er fra det engelse uttrykket vi har hentet symbolet P for sannsynlighet. I matematikken benyttes ofte bokstaven N for antall. Vi skriver derfor uttrykket over som:

$$P(\text{ spiss opp}) = \frac{N(\text{spissen opp})}{N(\text{antall kast})}$$

I uttrykket over står det det samme som tidligere.

Et mye brukt forhold

Skriver vi om det over på en mer generell form kommer vi fram til denne brøken

$$P(\text{ at noen skal skje}) = \frac{\text{antall gunstige for at det skjer}}{\text{antall mulige}}$$

Den vil vi få bruk for mange ganger.

2 Et stokastisk forsøk

I matematikken har du møtt matematiske modeller som funksjoner. De beskriver sammenhengen mellom to størrelser. Et eksempel er at sammenhengen mellom volumet av ei eske, V, og sida,x, i grunnflata er gitt ved:

$$V(x) = x^2(120 - 2x)$$

Her er det ikke rom for tvil. Hvis sida er $40\,cm$, vil volumet være

$$V(40) = 40^2(120 - 2 \cdot 40) = 64000$$

Vi kaller en slik modell for deterministisk. Det er bare ett eneste resultat når vi vet en innverdi. Slik er det ikke i stokastiske forsøk som beskrives av stokastiske modeller. Vi ander ikke hva som kommer til å skje når vi kaster en terning eller trekker et tilfeldig kort fra en kortstokk. Andre eksempler er resultatet av fotballkamper eller myntkast.

Alle er eksempler på stokastiske forsøk. Sjøl om vi ikke kan si akkurat hva som vil skje, kan vi si noe om hva som er mulig kan skje. Vi kan også gjenta forsøkene flere ganger.

3 Noen ord og uttrykk

Utfall

Et utfaller et resultat av et tilfeldig forsøk. Kaster vi terning har vi utfallene «spiss opp» eller «spiss ned». Kaster vi terning er eksempler på utfall: «firer», «ener», osv.

Hendinger

Det benyttes flere ord som betyr det samme. Mens noen kaller det en begivenhet, bruker andre hendelse, eller hending. Alle ordene betyr det samme. Uttrykk som ”minst fire”og ”to mynt på rad” kaller vi hendinger. Vi bruker stor bokstav (A,B, osv.) som betegnelse på en hending.

En hending kan omfatte ingen, ett eller flere av utfallene i utfallsrommet.

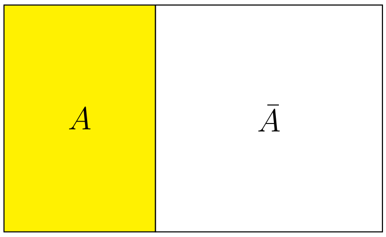
Fortsetter vi med eksemplet vårt kan vi definere denne hendingen:

$$A \text{ - hendingen spiss opp}$$

Vi vil også få behov for å skrive det motsatte av at A inntreffer. Det kalles ikke A og vi skriver det slik:

$$\bar{A} \text{ - hendingen ikke spiss opp}$$

I tilfellet med tegnestiften kan vi bruke symbolene når vi tegner opp de to hendigene.



Etter at vi har definert hendingene kan vi bruke dem i matematiske uttrykk, slik som dette:

$$P(\mathrm{A}) = \frac{N(\mathrm{A})}{N(\text{antall kast})}$$

Utfallsrom

Alle mulige utfall et forsøk kan få. Ser vi på det tilfeldige forsøket å kaste en ideell terning med seks sider er utfallsrommet at terningen ender med en, to, tre, fire, fem eller seks øyne opp. Slik: ⚀ ⚁ ⚂ ⚃ ⚄ ⚅

Med symboler kan vi skrive:

$$\mathrm{U} = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Inne i krøllparentsene står elementene, alle de enkelte delene, som utgjør mengden. Kaster vi tegnestift er utfallsrommet

$$\mathrm{U} = \{\text{«spiss opp», «spiss ned»}\}$$

Legg merke til at vi må ha med alle hendingene i utfallsrommet.

Disjunkte utfall

Utfall som utelukker hverandre. Utfallene kron og mynt utelukker hverandre og er derfor disjunkte.

4 En definisjon av sannsynlighet

I et forsøk med uniform sannsynlighet vet vi at alle utfallene er like sannsynlige. Da kan definere sannsynligheten for hending A som:

$$P(\mathrm{A}) = \frac{\text{antall gunstige utfall for } A}{\text{(antall mulige utfall}}$$

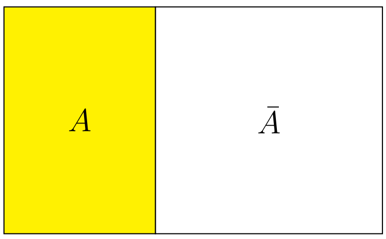
5 Sannsynlighetsmodell

Den russiske matematikeren Kolmogorov (1934) har gitt noen betingelser for en sannsynlighetsmodell.

Uansett sannsynlighetsbegrep gjelder dette:

- Sannsynligheten for et utfall er fra og med 0 til og med 1
- Summen av sannsynlighetene til alle utfallene i utfallsrommet er lik 1
- Sannsynligheten til en begivenhet er lik summen av sannsynlighetene til utfallene som utgjør begivenheten
- Sannsynligheten for en begivenhet som ikke kan skje, den umulige begivenheten $\emptyset$, skal være lik 0

Summen av sannsynlighetene skal være 1. Det har vi vært innom tidligere da vi tegnet figuren under.



Hele arealet er 1. Det betyr at sannsynligheten for komplementære hendinger skal være like 1.

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Mer matematisk

La funksjonen p ha utfallsrommet $U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ som definisjonsmengde og la verdiene $p(u_1), p(u_2), ..., p(u_n)$ være slik at:

1. $0 \leq p(u) \leq 1$ for alle utfall i U
2. $p(u_1) + p(u_2) + ... + p(u_n) = 1$
3. Hvis A er en begivenhet, så er: $p(A) = \sum\limits_{u \in A} p(u)$
4. $p(\emptyset) = 0$

Vi kaller funksjonen p for en sannsynlighetsfunksjon og verdien $p(u)$ for sannsynligheten for utfallet u

Vi sier at U sammen med p utgjør en sannsynlighetsmodell for forsøket

6 Union og snitt

For å illustrere union og snitt er det vanlig å bruke venndiagram. De er oppkalt etter en engelsk matematiker som het John Venn (1843-1923). Venndiagram forteller ikke noe om sannsynlighet, men de viser sammenhengen mellom hendinger på en fin måte. La oss se på et eksempel. Vi kaster den samme terningen som så mange ganger før. Da kan vi ha disse hendingene

$$A - \text{antall øyne er et oddetall}$$
$$B - \text{antall øyne er mindre enn fem}$$

Skriver vi ned elementene i utfallene i de to hendingene får vi

$A =$ ⚀ ⚂ ⚄

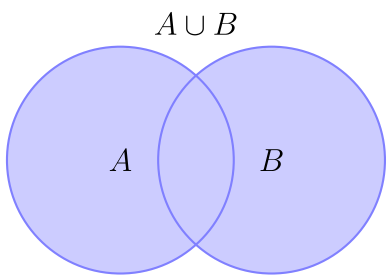
$B =$ ⚀ ⚁ ⚂ ⚃

Eller skrevet matematisk med elementer

$$A = \{1, 3, 5\}$$
$$B = \{1, 2, 3, 4\}$$

Union

Tidligere var Norge i en union med Sverige. De to landene var slått sammen til ett land. Det er nettopp det en union er: En sammenslåing av to mengder En union kan vi vise i et venndiagram på denne måten



Venndiagrammet minner også litt om Norge og Sverige? Hva blir unionen mellom de to hendingene A og B?

Bruker vi de matematiske symbolene kan vi skrive:

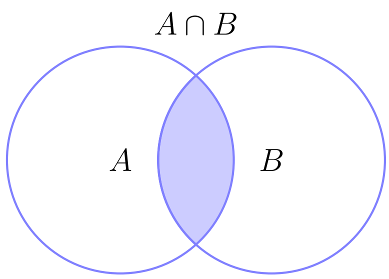
$$A \cup B = \{1, 3, 5\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$\cup$ er det matematiske symbolet for union

«Eller» er et stikkord når det gjelder union siden unionen vil være alle elementene som er med i mengden A eller i mengden B.

Snitt

Et snitt er det som er felles for to mengder. I et venndiagram kan vi framstille et snitt slik



Nå kan vi skrive snittet av de to mengdene A og B

$$A \cap B = \{1, 3, 5\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 3\}$$

Bare tallet en og tre er felles for de to.

$\cap$ er det matematiske symbolet for snitt

«og» er et stikkord siden snittet består av de elementene som fins i både den ene og den andre menden.

7 Enten den ene eller den andre

I sannsynlighetsregninga er det noen situasjoner som går igjen. Noen situasjoner kan stille flere krav. Slike situasjoner kan vi stort sett dele i to: «Enten eller» eller «Både og». Vi starter med å se på den første.

Vi kaster en terning

Et enkelt eksempel et terningkast. Vi kaster en ideell terning og skal finne sannsynligheten for at vi enten får fire eller fem.

Utfallrommet

⚀ ⚁ ⚂ ⚃ ⚄ ⚅

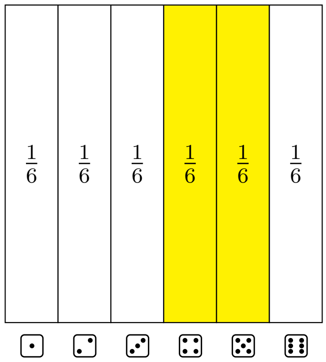
Vi definerer hendingene

$$A - \text{terningen lander med fire øyne opp}$$
$$B - \text{terningen lander med fem øyne opp}$$

Da kan vi benytte symbolene til å skrive sannsynligheten for at vi enten får fire eller fem.

$$P(A \cup B)$$

Tenker vi oss sannsynlighetene som arealer kommer vi fram til denne figuren.



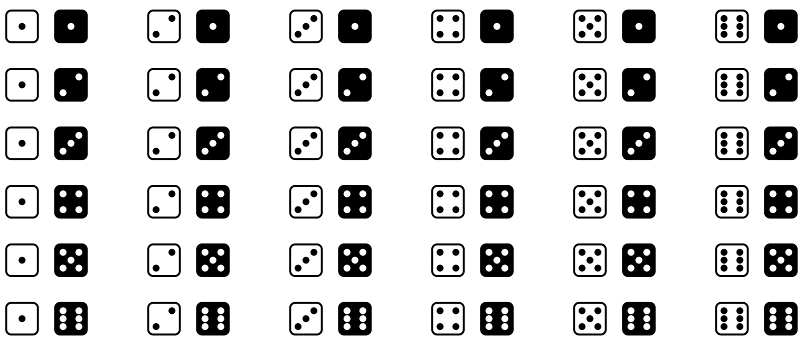
Hvor stor areal utgjør det som er gunstig for hendingen $A \cup B$? Jo, det må bli $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

En annen måte å finne det på er å se på utfallrommet og hva som er gunstig for utfallet. Teller vi opp finner vi at to av totalt seks hendinger er gunstige: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ Da har vi at

$$P(A \cup B) = \frac{1}{3}$$

Kast med to terninger

Vi vil benytte kast med to terninger som et eksempel framover. Tenker vi oss at vi har to terninger, en hvit og en svart, og kaster disse vil utfallsrommet være:



La oss se på et eksempel: Hva er sannsynligheten for at terningene enten har summen tre eller 6? Vi definerer hendingene

$$
\begin{aligned}
A &- \text{summen av øynenen er tre} \\
B &- \text{summen av øynene er seks}
\end{aligned}
$$

Vi skal finne $P(A \cup B)$

La oss først se på utfallene og telle antall mulige og antall gunstige. Her er de som gir summen tre:

Her er de gunstige for å få seks:

Teller vi opp ser vi at vi har sju gunstige utfall. Totalt er det 36 mulige utfall. Sannsynligheten blir da:

$$P(A \cup B) = \frac{7}{36}$$

La oss finne sannsynligheten ved å tenke se på sannsynlighetene $P(A)$ og $P(B)$.

$$
\begin{aligned}
P(A) &= \frac{2}{36} \\
P(B) &= \frac{5}{36}
\end{aligned}
$$

Hva blir summen av de to? Jo, $\frac{2}{36} + \frac{5}{36} = \frac{7}{36}$ Legg merke til at de to hendingene ikke hadde noe felles utfall.

Hvis to hendinger er disjunkte

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Hva om de to hendingene har felles utfall?

Vi kaster to terninger igjen og definerer disse to hendingene:

$$C - \text{den hvite lander med 1 opp}$$
$$D - \text{den svarte lander med 1 opp}$$

Her er utfallene som er gunstige for C

Her er utfallene som er gunstige for D

Et utfall er felles for C og D

Hvis vi skriver ned sannsynlighetene får vi

$$P(C) = \frac{6}{36}$$
$$P(D) = \frac{6}{36}$$
$$P(C \cap D) = \frac{1}{36}$$

Når vi nå skal finne sannsynligheten for $P(C \cup D)$ må vi passe på at vi ikke tar et utfall flere ganger. Teller vi opp de gunstige utfallene får vi 11. Vi har at $P(C \cup D) = \frac{11}{36}$

Det samme finner vi slik

$P(C \cup D) = \frac{6}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$

Vi må trekke fra sannsynligheten for det felles utfallet $P(C \cup D) = \frac{11}{36}$.

Vi kan skrive addisjonsregelen for to utfall, A og B, som ikke er disjunkte

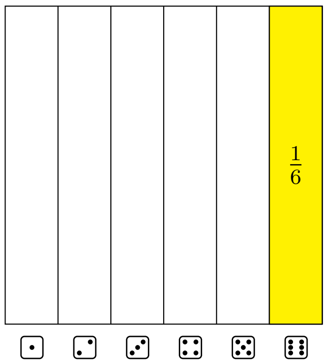
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

8 Både og

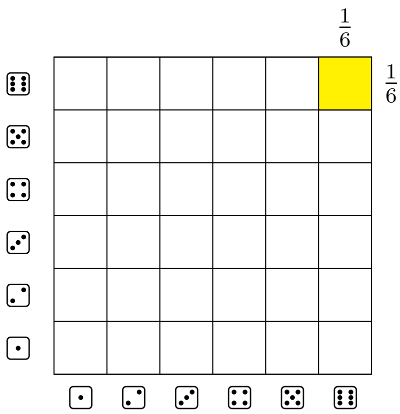
I tilfellene tidligere fant vi sannsynligheten når enten det ene eller det ander kriteriet måtte oppfylles. Vi kunne addere sannsynlighetene. Nå skal vi se på situasjoner hvor det stilles to krav og begge må oppfylles. La oss finne sannsynligheten for å få to seksere på rad når vi kaster en ideell terning. Her er det to krav: vi må få sekser på første kast og på andre kast. Desto fler krav som stilles, desto mindre blir sannsynligheten. Vi definerer hendingene

$$S - \text{terningen lander med sekser opp}$$
$$\bar{S} - \text{terningen lander ikke med sekser opp}$$

Da er $P(S) = \frac{1}{6}$. Kaster vi bare en gang har vi tidligere framstilte det som $\frac{1}{6}$ av et kvadrat.

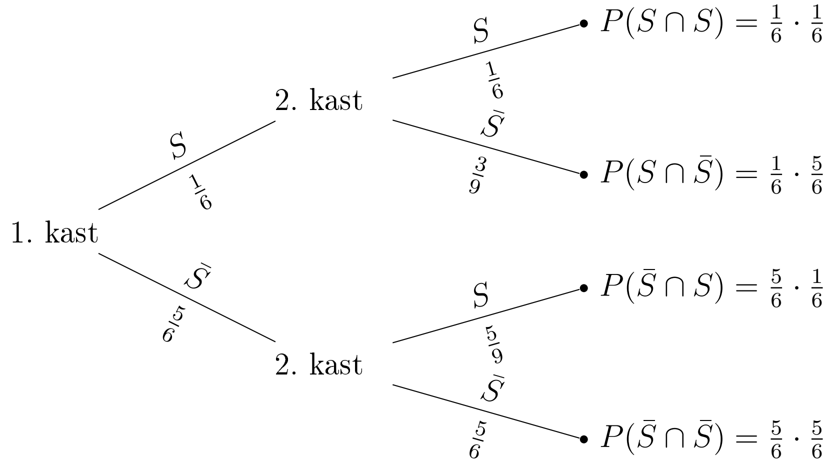


Med et tilleggskrav vil denne sannsynligheten reduseres. Sannsynligheten for at vi skal få en sekser til vil være $\frac{1}{6}$ av den forrige. Det kan vi framstille i denne figuren.



Valgtrær kan være lure

I et valgtre tegner vi opp hva vi skal gjøre og alle mulige utfall. Her er et eksempel for de to terningkastene.

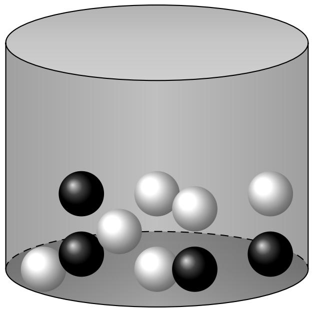


For å finne sannsynligheten for å få to sekser på rad må vi multiplisere de to sannsynlighetene. Et tilsvarende forsøk vil være å kaste to terninger en gang. Tenk litt på det...det blir det samme!

Betinga sannsynlighet

I de tidligere eksemplene har hvert forsøk vært uavhengig av det andre. Det er ikke alltid til felle. La oss se på et nytt eksempel.

Vi trekker kuler fra ei urne hvor det er 6 hvite og 4 svarte. Vi trekker uten å legge tilbake kulene. Hva er sannsynligheten for å trekke først ei hvit kule og så ei svart?



Vi definerer hendingene

$$H_1 - \text{trekker ei hvit kule i første trekkingen}$$
$$S_2 - \text{trekker ei svart kule i andre trekkingen}$$

Nå kan vi skrive sannsynligheten vi skal finne som:

$$P(H_1 \cap S_2)$$

Siden vi ikke legger tilbake kulene vi trekker vil utfallet av det første trekket påvirke sannsynligheten for det andre. Sannsynligheten for å trekke ei hvit kule ved første trekk finner vi ved antall gunstige delt på antall mulige. Det gir:

$$P(H_1) = \frac{6}{10}$$

Sannsynligheten for å trekke ei svart kule i andre trekk når vi vet at det er trukket ei hvit kule først er:

$$P(S_2|H_1) = \frac{4}{9}$$

Legg merke til skrivemåten. Tegnet | leser vi som gitt at".

Begge kravene må tilfredstilles og vi må finne produktet av de to sannsynlighetene

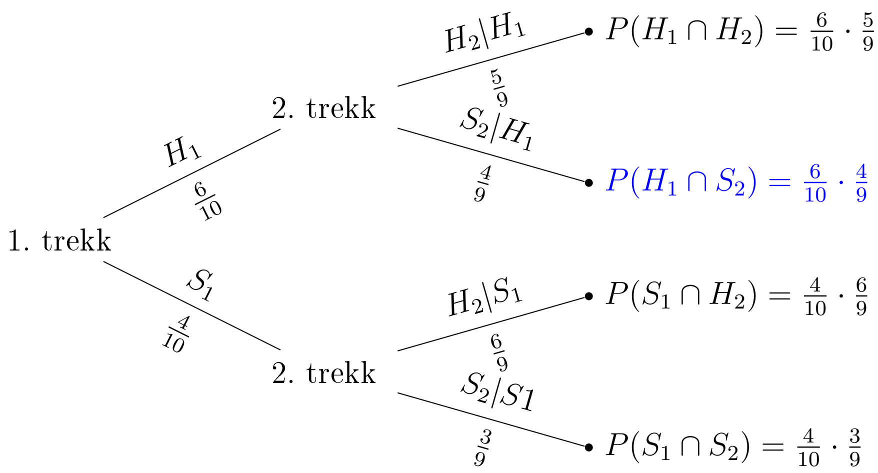
$$P(H_1 \cap S_2) = P(H_1) \cdot P(S_2|H_1) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9}$$

Da har vi funnet svaret $P(H_1 \cap S_2) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{15}$

Vi kan tegne et valgtre. Treet gir svar på denne oppgaven og alle andre varianter av de to trekkene. Ut fra de hendingene vi allerede har definert får vi:

$$H_2 - \text{trekker ei hvit kule i andre trekkingen}$$
$$S_1 - \text{trekker ei svart kule i første trekkingen}$$

Valgtreet



Kan du lese hva sannsynligheten for å trekke ei svart kule i første trekk og så ei svart i andre? Må ikke det bli $P(S_1 \cap S_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9}$?

Produktsetningen

Vi lar A og B igjen være to hendinger. Da kan vi skrive produktsetningen som

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Hvis hendingene er uavhengige vil $P(B) = P(B|A)$ og vi har:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$