Løsningsforslag Prøve 5 08.04.2014

DEL 1 UTEN HJELPEMIDLER

Oppgave 1

Bruk derivasjonsreglene og deriver disse funksjonene

Dette er polynom vi må derivere ledd for ledd ved å benytte derivasjonsregelen:

$(x^n)' = nx^{n-1}$

a) $g(x) = x^7$

$\underline{\boldsymbol{g'(x) = 7x^6}}$

b) $f(x) = x^4 + 3x^2 + x - 3$

$f'(x) = 4x^3 + 3 \cdot 2x + 1 = 4x^3 + 6x + 1$

$\underline{\boldsymbol{f'(x) = 4x^3 + 6x + 1}}$

Oppgave 2

Den deriverte funksjonen er definert slik:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Bruk definisjonen av den deriverte til å finne den deriverte av $f(x) = x^2 + 4x + 2$

Jeg regner ut telleren i brøken først.

$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 + 4 \cdot (x + \Delta x) + 2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 + 4x + 4 \cdot \Delta x + 2$

$f(x + \Delta x) - f(x) = x^2 + 2 \cdot x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 + 4x + 4 \cdot \Delta x + 2 - (x^2 + 4x + 2) = 2 \cdot x \cdot \Delta x + (\Delta x$

Hele brøken

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{2 \cdot x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 + 4 \cdot \Delta x}{\Delta x} = 2x + 4 + \Delta x$$

Grenseverdien

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + 4 + \Delta x = 2x + 4$$

$\underline{\boldsymbol{f'(x) = 2x + 4}}$

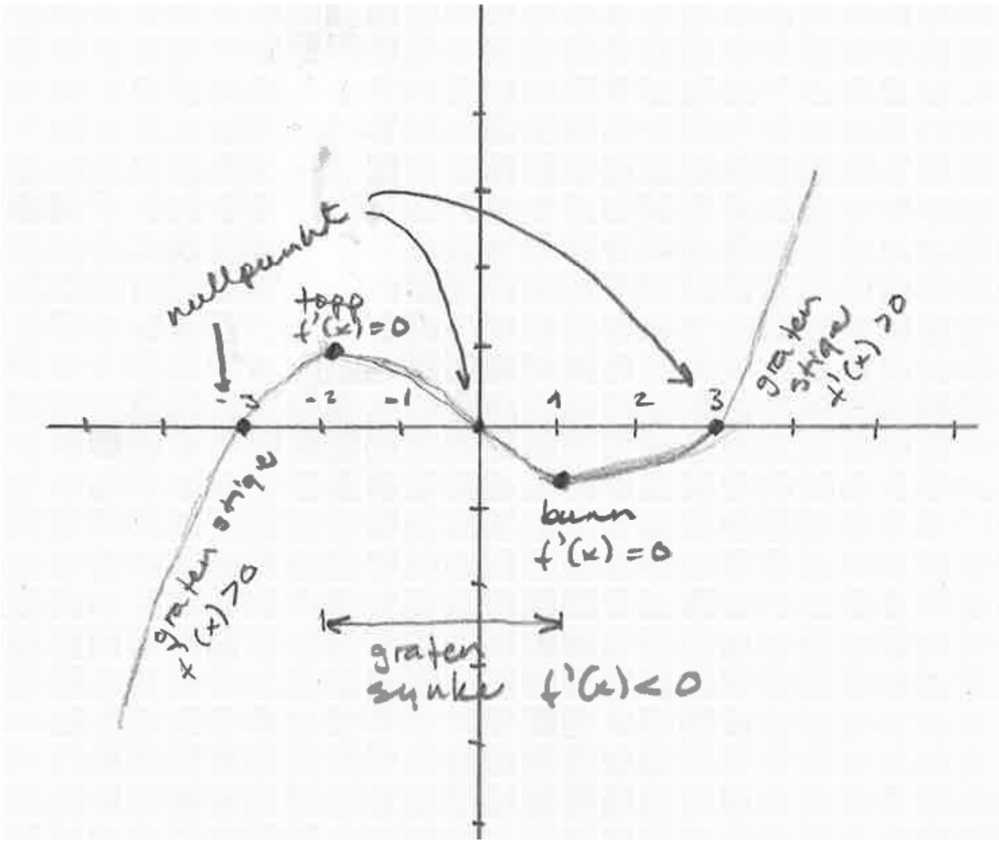
Oppgave 3

Vi vet dette om funksjonen f

- $f(x) = 0$ når $x = -3 \vee x = 0 \vee x = 3$
- $f(x) > 0$ når $x \in \langle -3, 0 \rangle \cup \langle 3, \rightarrow \rangle$
- $f'(x) < 0$ når $\langle -2, 1 \rangle$
- $f'(x) = 0$ når $x = -2 \vee x = 1$

Skisser grafen til funksjonen f

Her er en skisse



Oppgave 4

Gitt funksjonen $f(x) = x^3 - 3x^2$

a) Finn nullpunktene til f

$f(x) = 0$

$$x^3 - 3x^2 = 0$$
$$x^2(x-3) = 0$$
$$x = 0 \lor x = 3$$

Nullpunktene er $x = 0 \lor x = 3$

b) Bruk $f'(x)$ til å finne koordinatene til eventuelle topp- og bunnpunkter til f

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

Vi må finne ut når $f'(x) < 0$ og når $f'(x) > 0$

Det kan vi gjøre med et fortegnsskjema eller en tabell (som er enklest å tegne for meg).

Da starter vi med å faktorisere uttrykket: $3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

	$\langle \leftarrow, 0 \rangle$	0	$\langle 0, 2 \rangle$	2	$\langle 2, \rightarrow \rangle$
$3x$	$----$	0	$++++$	$+$	$++++$
$x-2$	$----$	$-$	$----$	0	$++++$
$f'(x)$	$++++$	0	$----$	0	$++++$
	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Funksjonsverdiene

$f(0) = 0$

$f(2) = -4$

Toppunkt (0,0) bunnpunkt (2,-4)

c) Finn likninga for tangenten i punktet $(1, f(1))$

Vi skal fram til ei likning for tangenten, som er ei rett linje: $y = ax + b$

Først kan vi finne stigningstallet til tangenten i punktet. Det finner vi slik

$a = f'(1) = 3 - 6 = -3$

Da vet vi at likninga er: $y = -3x + b$

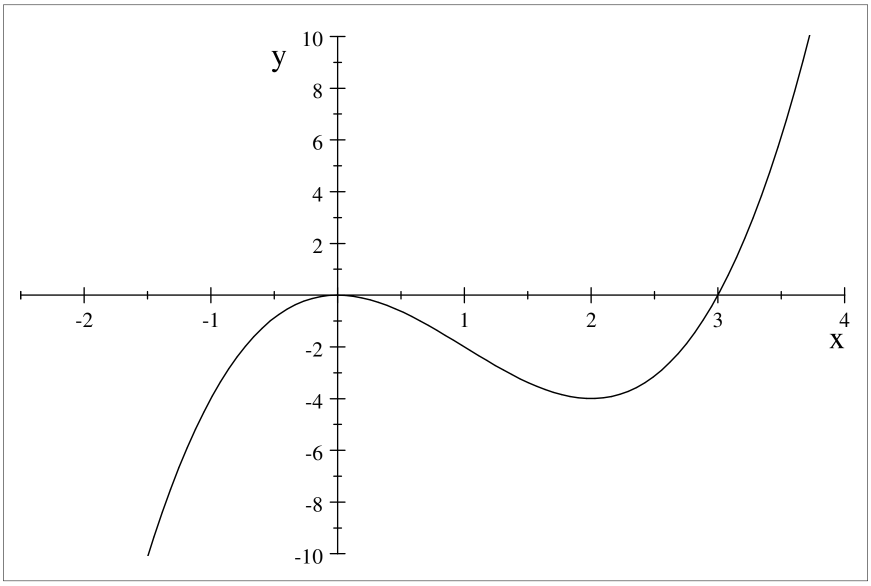
Vi vet at tangenten går gjennom punktet $(1, f(1))$. y-verdien i punktet er $f(1) = -2$

Setter inn i likninga og får

$-2 = -3 \cdot 1 + b \Rightarrow b = 1$

Likninga er $y = -3x + 1$

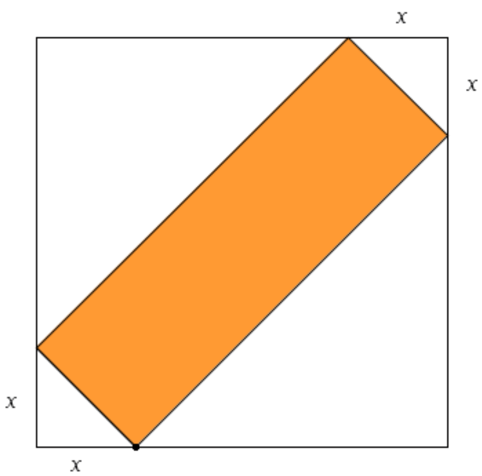
Her er grafen til funksjonen



DEL 2 SE I TILLEGG EGEN LØSNING I TI-NSPIRE

Oppgave 5

I et kvadrat med side 10 m er det innskrevet et rektangel (se figuren under).



a) Vis at arealet av rektanglet kan skrives som : $a(x) = 20x - 2x^2$

En måte å vise dette på er å se på areal av hele kvadratet. Arealet av det innskrevne rektanglet kan vi da finne ved å trekke arealene av trekantene i hjørnene fra arealet av hele kvadratet.

De to minste trekantene har arealet $\frac{1}{2} \cdot x \cdot x + \frac{1}{2} \cdot x \cdot x = x^2$

De største trekantene har arealet $\frac{1}{2} \cdot (10-x) \cdot (10-x) + \frac{1}{2} \cdot (10-x) \cdot (10-x) = (x-10)^2$

Hele kvadratet har arealet $10^2 = 100$

Arealet som blir igjen er rektanglets areal: $100 - x^2 - (x-10)^2 = 100 - x^2 - (x-10)^2 = 20x - 2x^2$

Et annet alternativ er å regne ut bredden og lengden av det innskrevne rektanglet ved å bruke pythagorassetningen.

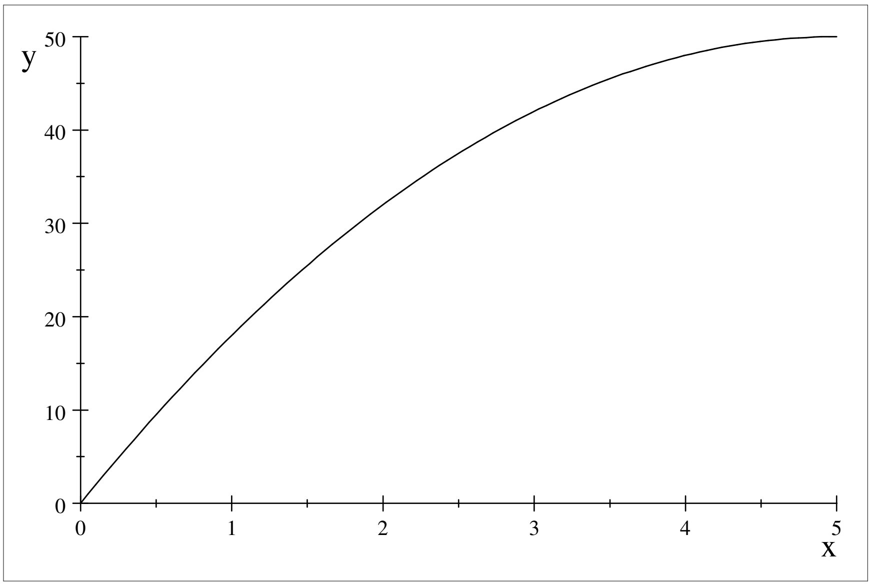
Bredden blir da: $\sqrt{2x^2} = \sqrt{2} \cdot x$

Lengden: $\sqrt{2(10-x)^2} = \sqrt{2} \cdot (10-x)$

Arealet: lengde x bredde = $\sqrt{2} \cdot x \cdot \sqrt{2} \cdot (10-x)^2 = 2 \cdot x \cdot (10-x) = 20x - 2x^2$

b) For hvilken verdi av x er arealet blir størst?

Det største arealet kan vi finne på flere måter. Enten grafisk eller ved å benytte den deriverte funksjonen.



Ved regning

Vi finner den deriverte: $a'(x) = 20 - 4x$

Så må vi løse likninga $a'(x) = 0$. I dette tilfellet ser vi at $x = 5$

Bruker vi Nspire kan vi skrive **solve**(**derivative**(**20x-x^2**,**x**)=**0**,**x**)

Grafisk

tegn grafen og be om å få toppunktet

Svaret skal bli:

<u>**Det største arealet har vi når $x = 5$**</u>

c) Hvor stort blir arealet da?

Vi må sette inn i uttrykket for arealet: $a(5) = 50$

<u>**Det største arealet er 50 m^2**</u>

d) Ta utgangspunkt i et kvadrat med side s. Forklar, og begrunn, hvordan det største innskrevne rektanglet vil se ut

Vi må gjøre det samme som vi har gjort, men denne gangen må vi ta utgangspunkt i at sida har lengde s

Først finner vi et nytt uttrykk for arealet: $a(x) = s^2 - x^2 - (s-x)^2 = 2x(s-x) = 2sx - 2x^2$

Vi finner den deriverte: $a'(x) = 2s - 4x$ og finner nå den deriverte er lik null

$$a'(x) = 0$$
$$2s - 4x = 0$$
$$x = \frac{s}{2}$$

Arealet vil alltid være størst når det innskrevne rektanglet er et kvadrat med hjørner i midtpunktet på sidene i det omskrevne kvadratet.

Oppgave 6

Gjør oppgave 4 fra del 1 med digitale verktøy. Legg merke til det siste spørsmålet (e) som er nytt!

Gitt funksjonen $f(x) = x^3 - 3x^2$

a) Finn nullpunktene til f

b) Bruk $f'(x)$ til å finne koordinatene til eventuelle topp- og bunnpunkter til f

c) Finn likninga for tangenten i punktet $(1, f(1))$

d) For hvilke x-verdier har grafen tangenter med stigningstall lik 9?

Det vil være det samme som å løse likninga $f'(x) = 9$

$$3x^2 - 6x = 9$$
$$3x^2 - 6x - 9 = 0$$
$$x = 3 \vee x = -1$$

Tangentene i punktene hvor $x = 3$ eller $x = -1$ har stigningstall lik 9