Løsningsforslag prøve 04.03.2014 1T

Dette løsningsforslaget er et tillegg til en løsning med TI-Nspire.

Oppgave 1

a) Løs likninga $2^x = 8$

Denne oppgaven kan vi løse direkte. Hva må to opphøyes i for at svaret skal bli åtte? Siden $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ har vi at $2^3 = 8$

$\underline{\boldsymbol{x = 3}}$

b) Løs likninga $2^x = 9$

Her kan vi ikke finne løsningen direkte, men vi vet at den ikke er langt unna tre. Vi må benytte logaritmer

$$\begin{aligned} 2^x &= 9 \\ \lg 2^x &= \lg 9 \\ x \cdot \lg 2 &= \lg 9 \\ x &= \frac{\lg 9}{\lg 2} = 3.\,1699 \end{aligned}$$

$\underline{\boldsymbol{x = 3.17}}$

c) Løs ved regning $\lg(3x+1) = 3$

$$\begin{aligned} \lg(3x+1) &= 3 \\ 10^{\lg(3x+1)} &= 10^3 \\ 3x+1 &= 1000 \\ x &= \frac{1000-1}{3} = 333 \end{aligned}$$

$\underline{\boldsymbol{x = 333}}$

Oppgave 2

Vi har gitt funksjonen $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$

a) Finn nullpunkt og skjæringspunkt med andreaksen ved regning.

Nullpunkt finner vi ved å løse likninga $f(x) = 0$. En brøk er lik null når telleren er lik null.

$$\begin{aligned} \frac{2x-1}{x+1} &= 0 \\ 2x-1 &= 0 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

<u>**Nullpunkt for** $\boldsymbol{x = \frac{1}{2}}$</u>

Skjæringspunkt med andreaksen finner vi når $x = 0$

$f(0) = \dfrac{-1}{1} = -1$

<u>**Skjæringspunkt med andreaksen (0, −1)**</u>

b) Bestem asymptotene til funksjonen

Bruddpunktet til f finner vi for den x-verdien som gjør nevneren lik null. Funksjonsverdien eksisterer ikke for den verdien. Bruddpunktet $x = -1$. Det er også likninga til den vertikale asymptoteten.

Vertikal asymptote: $x = -1$

Den horisontale asymptoten finner vi ved å se funksjonsverdien for store og små x-verdier. Her er noen av funksjonsverdiene:

$f(100) = \frac{199}{101} = 1.9703$ | $f(-1000) = \frac{667}{333} = 2.003$

$f(1000) = \frac{1999}{1001} = 1.997$ | $f(-10000) = \frac{6667}{3333} = 2.0003$

$f(10000) = \frac{19999}{10001} = 1.9997$ | $f(-100000) = \frac{66667}{33333} \approx 2.0$

$f(10000000000000) = \frac{19999999999999}{10000000000001} \approx 2.0000$ | $f(-1000000) = \frac{666667}{333333} \approx 2.0$

Vi kan også se på funksjonsuttrykket og tenke oss at det å legge til eller trekke fra 1 vil ha liten betydning når x-verdiene er store. Det betyr at $\frac{2x-1}{x+1} \approx \frac{2x}{x}$ når x er stor. Den siste brøken ser vi kan forkortes til 2.

Alternativt kan vi skrive om slik $\frac{2x-1}{x+1} = \frac{\frac{2x}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}} = \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$. Da er det muligens greiere å se at funksjonsverdien vil bli lik 2 når x-verdiene er store?

Horisontal asymptote $y = 2$

c) En funksjon er gitt ved $g(x) = -x + 3$. **Bestem skjæringspunktene mellom grafene til** f **og** g

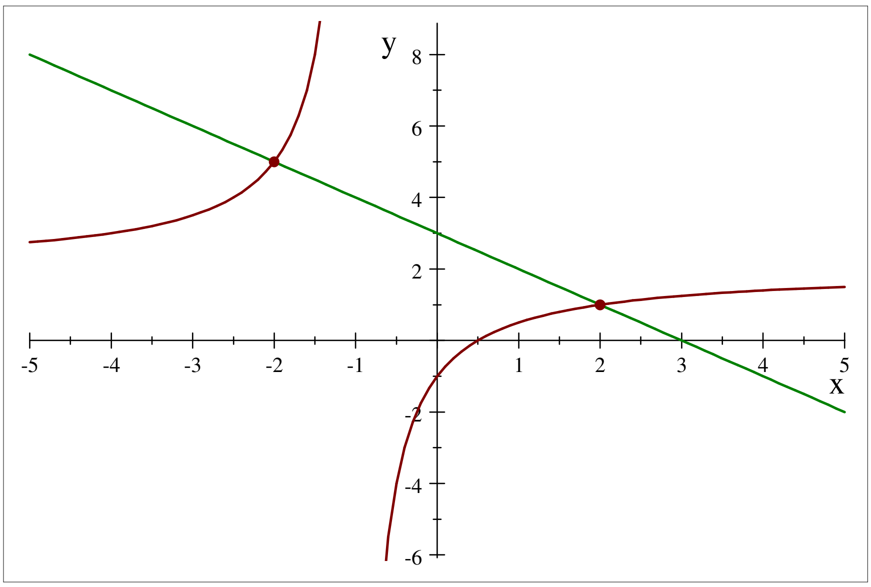
Ved regning

$$f(x) = g(x)$$
$$\frac{2x-1}{x+1} = -x + 3$$
$$2x - 1 = (-x+3)(x+1)$$
$$2x - 1 = -x^2 + 2x + 3$$
$$x^2 = 4$$
$$x = 2 \lor x = -2$$

y-verdiene $f(2) = 1$ $f(-2) = 5$

Da har vi at skjæringspunktene er $(2, 1)$ og $(-2, 5)$

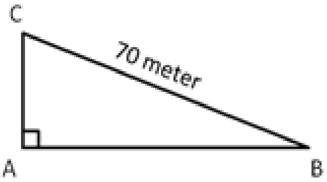
Grafisk



Skjæringspunktene er $(2, 1)$ og $(-2, 5)$

Oppgave 3

Figuren viser en trekantet tomt ABC der vinkel A er 90°. BC er 70 meter og omkretsen av tomta er 168 meter.



Vis at vi kan sette opp disse likningene

$$x^2 + y^2 = 4900$$
$$x + y = 98$$

Vi kaller $AB = x$ og $AC = y$.
Omkretsen er 168 meter. Det gir denne likninga: $x + y + 70 = 168 \Rightarrow x + y = 98$
Pythagoras gir $x^2 + y^2 = 70^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4900$

Løs likningssettet

I $\quad x^2 + y^2 = 4900$
II $\quad x + y = 98$
Av II finner vi $x = 98 - y$. Det setter vi inn i I

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4900 \\ (98 - y)^2 + y^2 &= 4900 \\ y^2 - 196y + 9604 + y^2 &= 4900 \\ y^2 - 196y + 9604 + y^2 - 4900 &= 0 \\ 2y^2 - 196y + 4704 &= 0 \\ y = 42 \vee y &= 56 \end{aligned}$$

Setter det inn og finner x-verdiene:$x = 98 - y = 98 - 42 = 56$ og $x = 98 - 56 = 42$
Sidene er 56*m* og 42*m*

Oppgave 4

Gitt funksjonen
$f(x) = x^2 - x - 6$

a) Finn nullpunktene til funksjonen ved regning, grafisk og digitalt

Ved regning
$f(x) = 0$

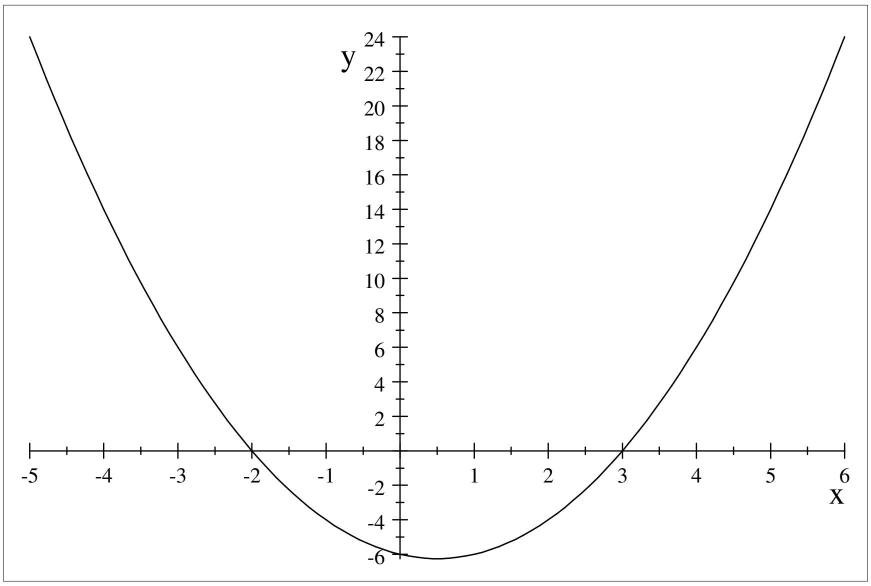
$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2}$$
$$x = 3 \vee x = -2$$

Grafisk og digitalt

se Nspire-fil

<u>**Nullpunktene er $x = 3 \vee x = -2$**</u>

b) Løs ulikheten $f(x) \le 0$ ved regning, grafisk og digitalt



Ved regning

Når vi løser ulikheter av andre grad tradisjonelt faktoriserer vi først, så tegner vi et fortegnsskjema og så leser vi av det. I en tekstbehandler er det enklere å lage en fortegnstabell, så det gjør jeg her

Faktoriserer ved å benytte nullpunktene. Da har vi at $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ hvor x_1 og x_2 er nullpunktene

$x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$

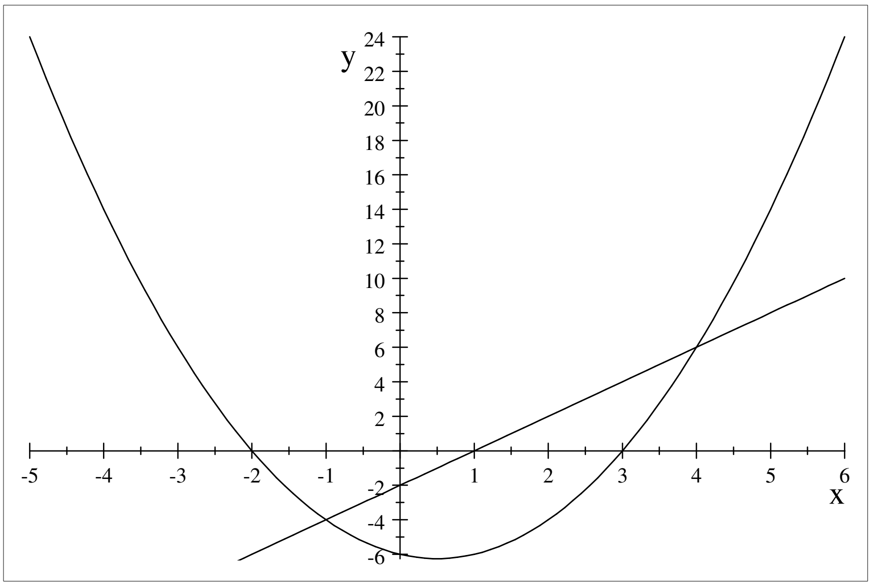
Tegner fortegnstabell

	$\langle \leftarrow, -2 \rangle$	-2	$\langle -2, 3 \rangle$	3	$\langle 3, \rightarrow \rangle$
$x+2$	$- - - -$	0	$+ + + +$	$+$	$+ + + +$
$x-3$	$- - - -$	$-$	$- - - -$	0	$+ + + +$
$f(x)$	$+ + + +$	0	$- - - -$	0	$+ + + +$

Leser av og finner at $f(x) \le 0$ når

<u>$\boldsymbol{x \in [-2, 3]}$</u>

c) La $g(x) = 2x - 2$ Løs ulikheten $g(x) > f(x)$



Først må vi finne skjæringspunktene

$$f(x) = g(x)$$
$$x^2 - x - 6 = 2x - 2$$
$$x^2 - 3x - 4 = 0$$
$$x = 4 \vee x = -1$$

$\boldsymbol{x \in \langle -1, 4 \rangle}$

d) Løs ulikheten $f(x) \leq g(x)$

Er dette samme oppgave? Ja, nesten men nå skal skjæringspunktene være med

$\underline{\boldsymbol{x \in [-1, 4]}}$

Oppgave 5

I en saueflokk har det brudt ut en smittsom sykdom. Antall smitta sauer øker med 25% hver uke. Da sykdommen ble oppdaget var 23 sauer smitta.

Forskere har funnet at antall dyr som er smitta kan beskrives av en eksponentialfunksjon på formen $n(x) = a \cdot b^x$

a) Vis at antall dyr som er smitta etter x uker kan beskrives av funksjonen:
$n(x) = 23 \cdot 1.25^x$

Vekstfaktoren er $1 + \frac{25}{100} = 1.25$

Utgangspunktet er 23 sauer.

b) Hvor mange dyr er smitta etter 5 uker?

$n(5) = 70.19$

Etter 5 uker er omtrent 70 dyr smitta

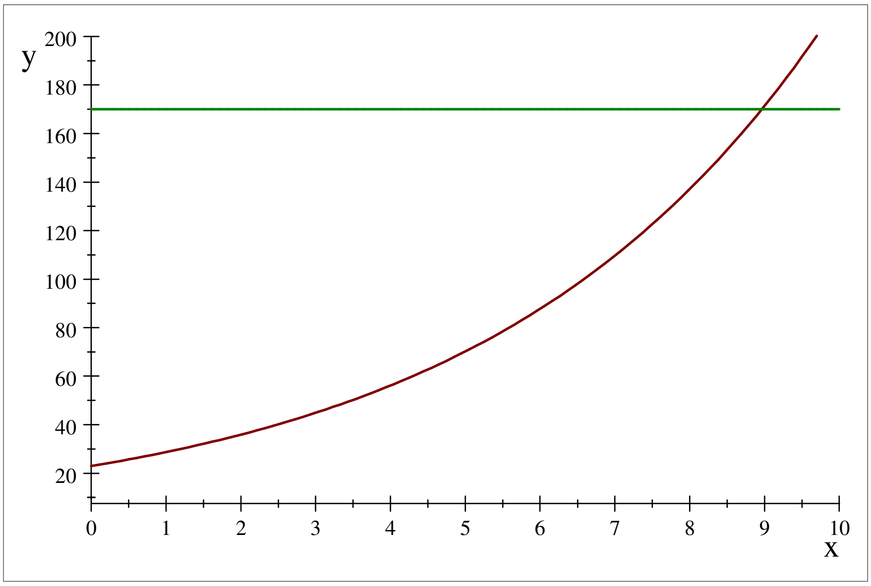
c) Hvor lang tid tar det før 170 sau er smitta? Finn svaret ved regning, grafisk og digitalt

Vi skal løse likninga $n(x) = 170$

Ved regning

$$
\begin{aligned}
23 \cdot 1.25^x &= 170 \\
1.25^x &= \frac{170}{23} = 7.3913 \\
\lg 1.25^x &= \lg 7.3913 \\
x \cdot \lg 1.25 &= \lg 7.3913 \\
x &= \frac{\lg 7.3913}{\lg 1.25} = 8.9642
\end{aligned}
$$

Grafisk



<u>Det tar ni uker før 170 sau er smitta</u>