Løsningsforslag eksamen høsten 2010

DEL 1: Uten hjelpemidler

Oppgave 1

a) Løs likningssystemet $\begin{bmatrix} x+y & =4 \\ 3x-y & =8 \end{bmatrix}$

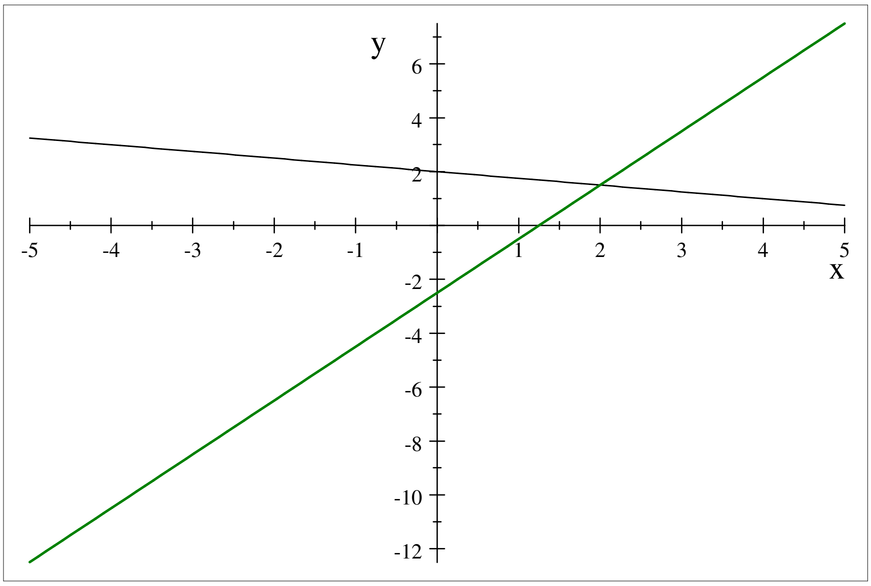
$x+y=4 \Rightarrow y=4-x$. Setter inn i den andre likninga: $3x-(4-x)=8$, får $x=3$

$y=4-3=1$

$\underline{\boldsymbol{x=3 \wedge y=1}}$

b) Løs likningen $-\frac{1}{4}x+2=2x-\frac{5}{2}$

1) grafisk



2) ved regning

$$-\frac{1}{4}x+2=2x-\frac{5}{2}$$

$$-\frac{1}{4}x-2x=-\frac{5}{2}-2$$

$$-\frac{9}{4}x=-\frac{9}{2}$$

$$x=\frac{-\frac{9}{2}}{-\frac{9}{4}}=2$$

$y=-\frac{1}{4}\cdot 2+2=\frac{3}{2}$

$\underline{\boldsymbol{x=2 \wedge y=\frac{3}{2}}}$

c) Regn ut og skriv svaret på standardform $5.7\cdot 10^4+3.0\cdot 10^3$

$5.7\cdot 10^4+3.0\cdot 10^3=60000=6\cdot 10^4$

$\underline{\boldsymbol{6\cdot 10^4}}$

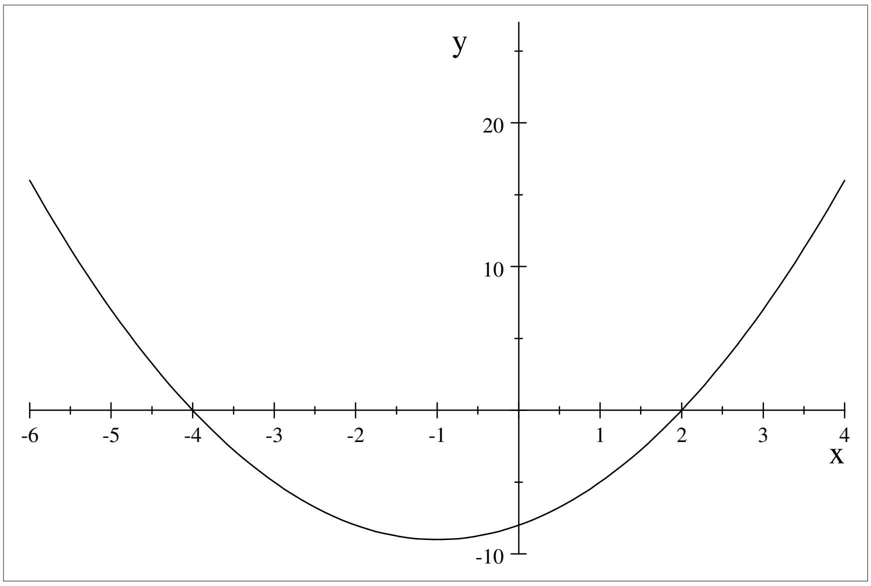
d) Trekk sammen og skriv så enkelt som mulig $\frac{3}{x+4} + \frac{24}{x^2-16}$

$$\frac{3}{x+4} + \frac{24}{x^2-16} = \frac{3}{x+4} + \frac{24}{(x-4)(x+4)} = \frac{3(x-4)}{(x-4)(x+4)} + \frac{24}{(x-4)(x+4)} = \frac{3x+12}{(x-4)(x+4)} = \frac{3(x+4)}{(x-4)(x+4)} = \frac{3}{x-4}$$

$\underline{\boldsymbol{\frac{3}{x-4}}}$

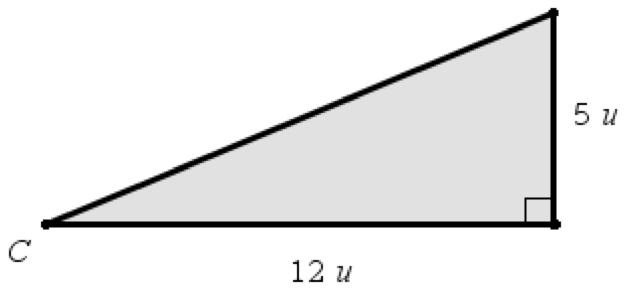
e) Løs ulikheten $x^2 + 2x - 8 \ge 0$

$$x^2 + 2x - 8 \ge 0$$
$$(x+4)(x-2) \ge 0$$



$\underline{\boldsymbol{x \in \langle \leftarrow, -4] \cup [2, \rightarrow\rangle}}$

f) Tegn en rettvinklet trekant ABC der $\tan C = \frac{5}{12}$



g) I en twistpose er det 25 twistbiter. Per liker 16 av disse. Vi trekker tilfeldig to twistbiter fra posen.

1) Finn sannsynligheten for at Per liker begge twistbitene vi trekker.

$\frac{16}{25} \cdot \frac{15}{24} = \frac{2}{5}$

<u>**Sannsynligheten er $\frac{2}{5}$**</u>

2) Finn sannsynligheten for at Per bare liker én av twistbitene vi trekker.

$\frac{16}{25} \cdot \frac{9}{24} + \frac{9}{25} \cdot \frac{16}{24} = \frac{12}{25}$

<u>**Sannsynligheten er $\frac{12}{25}$**</u>

Oppgave 2

En funksjon f er gitt ved $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 7$

a) Finn den momentane vekstfarten når $x = 1$ **.**

$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^{3-1} - 2 \cdot x^{2-1} = x^2 - 2x$

$f'(1) = 1 - 2 = -1$

Den momentane vekstfarten er -1

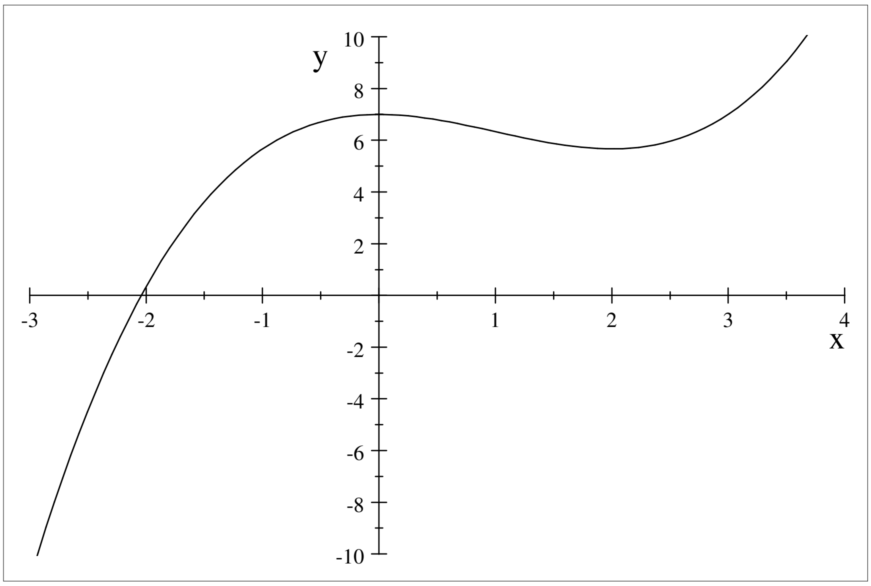
b) Finn den gjennomsnittlige vekstfarten fra $x = 0$ **til** $x = 3$.

$\frac{f(3)-f(0)}{3} = 0$

Kan du ut fra dette avgjøre om grafen til f har ekstremalpunkt i intervallet $[0,3]$? Begrunn svaret.

c) Finn koordinatene til eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f ved regning.

$f(x)$



$f'(x) = 0$

$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 2$

$f(0) = 7$

$f(2) = \frac{17}{3}$

Toppunkt $(0,7)$. Bunnpunkt $(2, \frac{17}{3})$

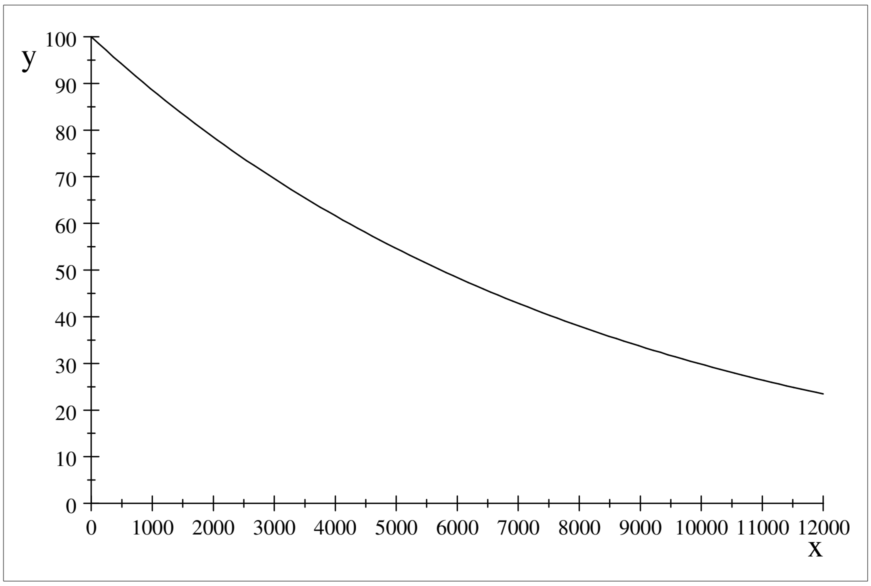
DEL 2: Med hjelpemidler

Oppgave 3

Funksjonen T gitt ved $T(x) = 100 \cdot 0.5^{\frac{x}{5730}}$ viser hvor mange prosent av opprinnelig mengde C-14 det er igjen i en plante x år etter at planten er død.

a) Tegn grafen til T for $x \in [0, 12000]$.

$T(x)$



b) **Hvor lang tid tar det før opprinnelig mengde C-14 i en plante er halvert**?

$$\begin{aligned} 100 \cdot 0.5^{\frac{x}{5730}} &= 50 \\ 0.5^{\frac{x}{5730}} &= 0.5 \\ \tfrac{x}{5730} \cdot \lg 0.5 &= \lg 0.5 \\ \frac{x}{5730} &= 1 \\ x &= 5730 \end{aligned}$$

Etter 5730 år er mengden halvert

På bildet ser du rester av en gammel trebrønn som ble funnet under utgravinger i Vestfold. Målinger viste at treverket inneholdt 86,5 % av opprinnelig mengde C-14.

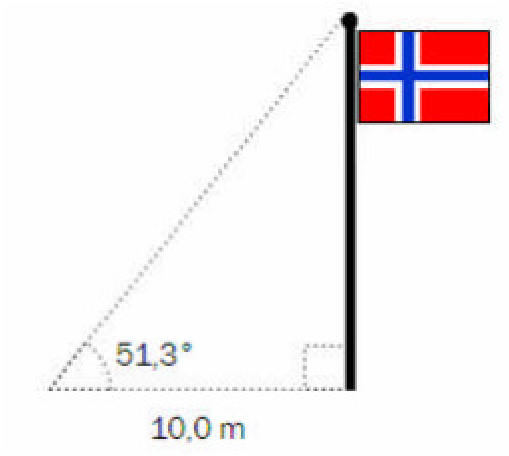
c) **Omtrent hvor gammel var brønnen da målingene ble gjort**?

$$\begin{aligned} 100 \cdot 0.5^{\frac{x}{5730}} &= 86.5 \\ 0.5^{\frac{x}{5730}} &= 0.865 \\ \frac{x}{5730} &= \frac{\lg 0.865}{\lg 0.5} \\ x &= 5730 \cdot \frac{\lg 0.865}{\lg 0.5} = 1198.9 \end{aligned}$$

Brønnen var omtrent 1200 år gammel

Oppgave 4

Anders, Hilde og Petter har valgt 1T. De har et prosjekt der de skal bruke trigonometri til å løse praktiske problemstillinger. Anders vil finne ut hvor høy flaggstanga på skoleplassen er. Han måler avstand og vinkel som vist på figuren ovenfor.

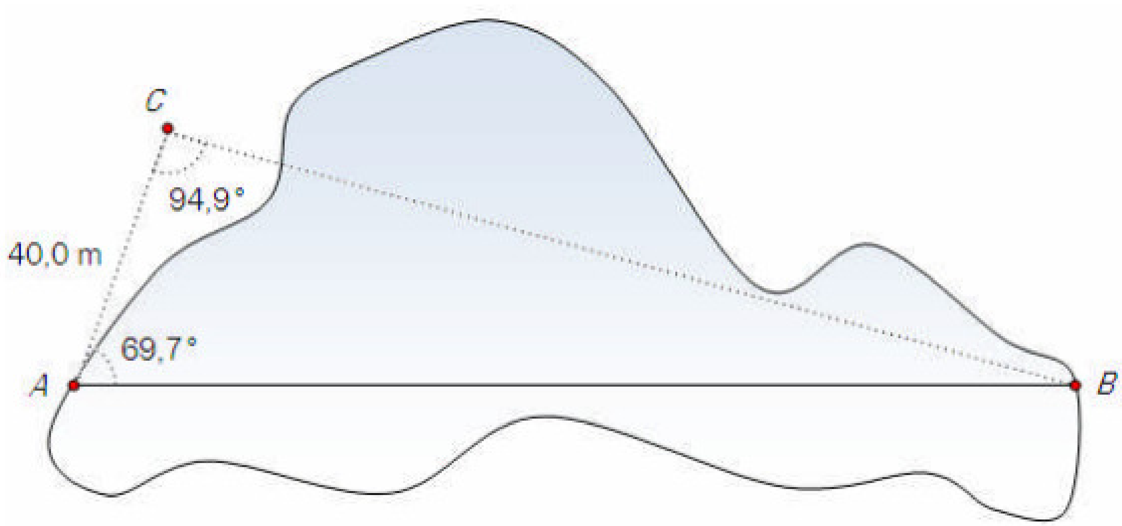


a) Bruk opplysningene på figuren og regn ut hvor høy flaggstanga er.

$$\tan 51.3^\circ = \frac{h}{10.0}$$

$$h = 10.0 \cdot \tan 51.3^\circ = 12.482$$

<u>**Flaggstanga er 12.5 m**</u>



Hilde er på tur og kommer til en innsjø. Hun står i punkt A og vil finne ut hvor langt det er til punkt B på den andre siden av innsjøen. Hun måler avstanden AC , ‘A og ‘C .
Se figuren ovenfor.

b) Bruk opplysningene på figuren og regn ut hvor langt det er fra A til B .

Vinkel B: $180^\circ - 69.7^\circ - 94.9^\circ = 15.4^\circ$

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\frac{c}{\sin 94.9^\circ} = \frac{40.0}{\sin 15.4^\circ}$$

$$c = \sin 94.9^\circ \cdot \frac{40.0}{\sin 15.4^\circ} = 150.08$$

<u>$\boldsymbol{AB = 150.0}$ **m**</u>

På skoleplassen står det tre trær. Trærne danner hjørnene i en trekant. Petter måler avstandene mellom trærne til å være henholdsvis 20, 24 og 14 m.

c) Regn ut arealet av trekanten som trærne danner.

Bruker cosinussetningen for å finne en vinkel

$$
\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\
14^2 &= 24^2 + 20^2 - 2 \cdot 24 \cdot 20 \cdot \cos A \\
196 &= 976 - 2 \cdot 24 \cdot 20 \cdot \cos A \\
\cos A &= \frac{196 - 976}{-2 \cdot 24 \cdot 20} = 0.8125 \\
\angle A &= 35.66°
\end{aligned}
$$

Arealsetningen

$T_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB \cdot \sin \angle A = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 20 \cdot \sin 35.66° = 139.91$

Arealet av trekanten er 140 m^2

Oppgave 5

Fotballgruppa i et idrettslag ønsker seg en ny ballbinge. De gjennomfører en spørreundersøkelse for å finne ut hva medlemmene i idrettslaget mener om dette.

- Alle de 240 medlemmene i idrettslaget blir spurt.
- 45 % av medlemmene er kvinner.
- 63 av mennene ønsker ballbinge.
- Til sammen 110 av medlemmene ønsker ikke ballbinge.

a) Tegn av tabellen nedenfor i besvarelsen din. Bruk opplysningene ovenfor og fyll inn tallene som skal stå i de hvite feltene.

Antall kvinner $240 \cdot 0.45 = 108$

	Mann	Kvinne	Totalt
Ønsker ballbinge	63	67	130
Ønsker ikke ballbinge	69	41	110
Totalt	132	108	240

B - ønsker ballbinge

M - mann

K - kvinne

b) Finn sannsynligheten for at et tilfeldig valgt medlem i idrettslaget ønsker ballbinge.

$P(M) = \frac{130}{240} = \frac{13}{24} = 0.54167$

Et medlem blir valgt tilfeldig. Det viser seg at dette medlemmet ønsker ballbinge.

c) Finn sannsynligheten for at dette medlemmet er en mann.

$P(M \mid B) = \frac{63}{132} = \frac{21}{44} = 0.47727$

Styret i idrettslaget setter som krav at minst 75 % av medlemmene må ønske ballbinge dersom de skal godkjenne planene. Fotballgruppa prøver å verve nye medlemmer som ønsker ballbinge.

d) Hvor mange slike medlemmer må fotballgruppa verve for at kravet fra styret skal innfris?

Slike medlemmer = medlemmer som ønsker ballbinge

Antall medlemmer totalt $240 + x$

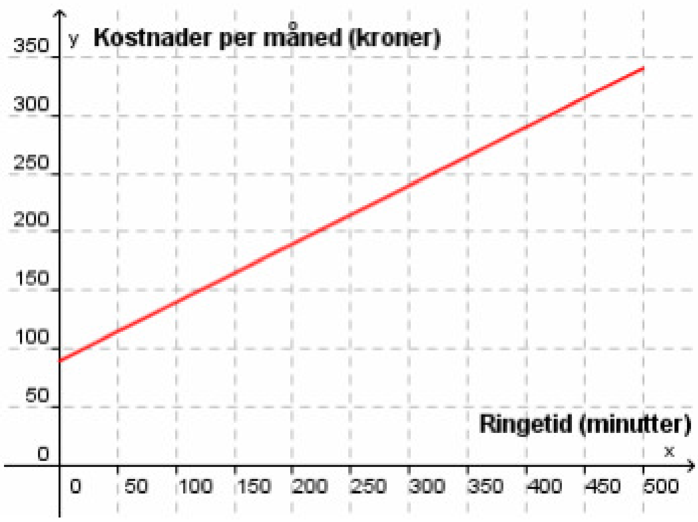
Antall tilhengere av ballbinge: $130 + x$

$$\frac{130 + x}{240 + x} = 0.75$$
$$130 + x = 0.75 \cdot (240 + x)$$
$$130 + x = 0.75x + 180$$
$$x - 0.75x = 180 - 130$$
$$0.25x = 50$$
$$x = \frac{50}{0.25} = 200$$

200 må verves

Oppgave 6

Et telefonabonnement har ofte en fast månedspris. I tillegg betaler du for hvert minutt du ringer.



a) Grafen til høyre viser kostnader per måned med et gitt telefonabonnement. Bruk grafen og finn den faste månedsprisen og prisen for hvert minutt du ringer.

Månedsavgift 87.50 kr

Pris per minutt 0.50 kr

Tabellen nedenfor viser kostnader per måned med tre ulike telefonabonnementer, A, B og C.

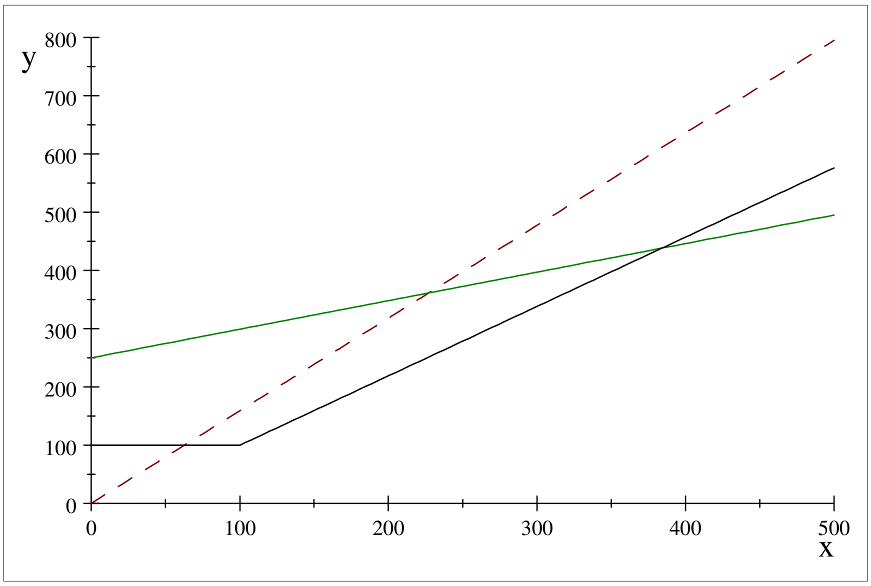
Abonnement	Fast månedspris	Pris per minutt du ringer
A	0 kroner	1,59 kroner per minutt
B	100 kroner	De første 100 minuttene er gratis, deretter 1,19 kroner per minutt
C	250 kroner	0,49 kroner per minutt

b) Tegn grafer som viser de månedlige kostnadene med hvert av de tre telefonabonnementene i ett nytt koordinatsystem. Velg x - verdier fra og med 0 minutter til og med 500 minutter.

A: $y = 1.59x$

B: $y = 100$ fra 0 til 100 deretter $y = 1.19x + 100$

C: $y = 0.49x + 250$



c) Hvor mye må du ringe for at det skal lønne seg å bruke hvert av de tre abonnementene A, B og C?

Det finner vi enklest ved å lese av grafene

Oppgave 7

En undersøkelse viser at 95 % av elevene ved de videregående skolene i et fylke har profil på Facebook. Vi velger tilfeldig 25 elever fra disse skolene.

a) Finn sannsynligheten for at alle 25 elevene har profil på Facebook.

Binomisk forsøk: $P() = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$ hvor $p = 0.95$

$0.95^{25} = 0.27739$

Vi kan bruke formelen også, men det enklere å la være

$P(X = 25) = \binom{25}{25} \cdot 0.95^{25} \cdot (1-0.95)^{25-25} = 0.27739$

<u>**Sannsynligheten for at alle har profil er 0.277**</u>

b) Finn sannsynligheten for at flere enn 20 av de 25 elevene har profil på Facebook.

$P(X = 21) = \binom{25}{21} \cdot 0.95^{21} \cdot (1-0.95)^{25-21} = 2.6926 \times 10^{-2}$

$P(X = 22) = \binom{25}{22} \cdot 0.95^{22} \cdot (1-0.95)^{25-22} = 9.3016 \times 10^{-2}$

$P(X = 23) = \binom{25}{23} \cdot 0.95^{23} \cdot (1-0.95)^{25-23} = 0.23052$

$P(X = 24) = \binom{25}{24} \cdot 0.95^{24} \cdot (1-0.95)^{25-24} = 0.36499$

$2.6926 \times 10^{-2} + 9.3016 \times 10^{-2} + 0.23052 + 0.36499 + 0.27739 = 0.99284$

På Nspire: 1-binomCdf(25,0.95,20)

<u>**Sannsynligheten er 0.993**</u>

Oppgave 8

I denne oppgaven skal du velge enten alternativ I eller alternativ II. De to alternativene teller like mye ved sensuren.

Alternativ I

En funksjon f er gitt ved $f(x) = -2x^2 + ax + 4$

a) Finn $f'(x)$. Bruk den deriverte til å finne toppunktet til f når $a = 2$.

$f'(x) = (-2) \cdot 2 \cdot x^{2-1} + a = a - 4x$

<u>$\boldsymbol{f'(x) = a - 4x}$</u>

$a = 2$

$f'(x) = 2 - 4x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{2}) = -2 \cdot (\frac{1}{2})^2 + 2 \cdot (\frac{1}{2}) + 4 = \frac{9}{2}$

<u>**Toppunktet er $(\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$**</u>

b) Bestem verdien av a slik at x - koordinaten til toppunktet er -1.

$f'(x) = 0$ når $x = -1$

$a - 4 \cdot (-1) = 0 \Rightarrow a = -4$

<u>$\boldsymbol{a = -4}$</u>

c) For hvilken verdi av a har y - koordinaten til toppunktet lavest verdi?

$f'(x) = a - 4x$

$a - 4x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}a$

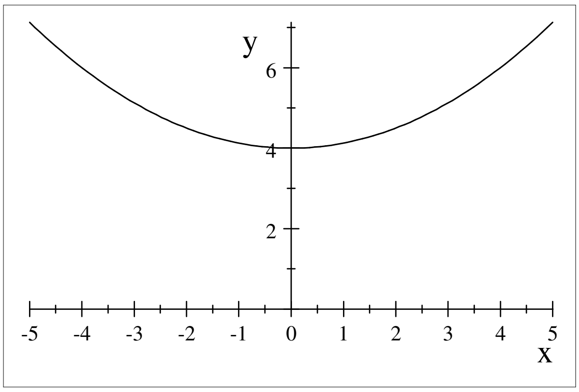
$y = f(\frac{a}{4}) = -2 \cdot (\frac{a}{4})^2 + a \cdot \frac{a}{4} + 4 = \frac{1}{8}a^2 + 4$

Vi finner en funksjon som gir oss y-verdien når vi vet a-verdien. Oppgaven blir å finne den minste funksjonsverdien.

Uttrykket er $\frac{1}{8}a^2 + 4$

Deriverer: $\frac{1}{4}a$ og finner hvilken a-verdi som gjør at det blir null, dvs. $a = 0$. Det gir den laveste y-verdien

Den laveste verdien er $y = 4$



Alternativ II

a) Sidene i en trekant er 27 cm, 20 cm og 12 cm lange. Er trekanten rettvinklet?

Vi kan bruke pythagoras for å undersøke om trekanten er rettvinkla. De to korteste sidene må være kateter (hvorfor?)

$27^2 = 729$. Det er ikke lik $20^2 + 12^2 = 400 + 144 = 544$

<u>**Trekanten er ikke rettvinkla**</u>

Rolf har en 6,0 m lang jernstang. Han vil bruke stangen til å lage en rettvinklet trekant. Den ene kateten skal være 2,0 m lang.

b) Regn ut lengden av de to andre sidene i trekanten.

Den ene kateten er 2.0m. Vi kaller hypotenusen for h. Den siste kateten blir da $6 - 2 - h = 4 - h$

Pythagoras

$$\begin{aligned} 2.0^2 + (4-h)^2 &= h^2 \\ h^2 - 8h + 20.0 &= h^2 \\ 20.0 - 8h &= 0 \\ h &= \frac{20}{8} = 2.5 \end{aligned}$$

<u>**Hypotenusen må være 2.5 m og kateten 1.5 m**</u>

Rolf finner en ny stang som er 6,0 m lang. Av denne stangen vil han lage en trekant der en vinkel er 120° og en av de tilstøtende sidene er 2,0 m lang.

c) Regn ut lengden av de to andre sidene i denne trekanten.

Vi kaller de siste sidene for a og b. Velger vi a som motstående for vinkelen, får vi $b = 6 - 2 - a = 4 - a$

Vi bruker cosinussetningen

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ a^2 &= (4-a)^2 + 2^2 - 2 \cdot (4-a) \cdot 2\cos 120^\circ \\ a^2 &= a^2 - 10a + 28 \\ 10a &= 28 \\ a &= \frac{28}{10} = 2.8 \end{aligned}$$

$b = 4 - 2.8 = 1.2$

<u>**Sidene er 1.2 m og 2.8 m**</u>